



**Universidade de Aveiro** Departamento de Matemática  
**2013**

**Aida Patrícia  
Marques  
Afonso**

**Módulos dinâmicos em GeoGebra para apoio ao  
ensino do cálculo de áreas**





**Universidade de Aveiro** Departamento de Matemática  
2013

**Aida Patrícia  
Marques  
Afonso**

## **Módulos dinâmicos em GeoGebra para apoio ao ensino do cálculo de áreas**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica das Professoras Doutoras Andreia Oliveira Hall, Professora Associada e Rosa Amélia Baptista Ferreira Soares Martins, Professora Auxiliar, ambas do Departamento de Matemática e da Universidade de Aveiro





Dedico este trabalho ao meu filho, pois é ele a minha fonte de inspiração, é por ele que procuro fazer sempre mais e melhor.



## **O júri**

Presidente

**Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira**  
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Arguente

**Professor Doutor Milton dos Santos Ferreira**  
Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Leiria (Departamento de Matemática)

Orientadoras

**Professora Doutora Andreia Oliveira Hall**  
Professora Associada da Universidade de Aveiro

**Professora Doutora Rosa Amélia Soares Martins**  
Professora Auxiliar Aposentada da Universidade de Aveiro



## **Agradecimentos**

Ao meu filho pelo ânimo e coragem que me transmite diariamente; às minhas orientadoras Professoras Doutoras Andreia Oliveira Hall e Rosa Amélia Soares Martins, pela orientação e aquisição de saber que me proporcionaram; ao Professor Arsélio Martins pela disponibilidade e pelos conhecimentos que me transmitiu sobre o GeoGebra, que foram essenciais para a execução deste trabalho; aos meus pais por me terem transmitido os valores que pautam a minha vida, pelo amor e por me ajudarem a superar as dificuldades com que me vou deparando; ao meu marido pelo apoio, carinho e companheirismo e à minha equipa do CNO de Sever do Vouga por toda a força que me transmitiu para me inscrever neste mestrado.



**Palavras-chave**

*GeoGebra*, área, ensino de geometria, módulos interativos, polígonos e círculo

**Resumo**

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver algumas construções dinâmicas e interativas com o apoio do *GeoGebra*, que auxiliem o ensino/aprendizagem da geometria. O trabalho centra-se na construção de aplicações interativas que facilitem a percepção do porquê das fórmulas utilizadas para o cálculo das áreas de polígonos e do círculo.

Começa-se por ilustrar a fórmula de cálculo da área do retângulo, para de seguida, se ilustrarem as fórmulas de cálculo das áreas do paralelogramo, do triângulo, do trapézio, do papagaio e finalmente do círculo. Sempre que pertinente, as figuras são decompostas e “transformadas” num retângulo equivalente (com igual área). Procurou-se que as transformações utilizadas ajudassem a compreender as expressões que se obtêm para o cálculo da área de cada figura.





**Keywords:** GeoGebra, area, geometry teaching, interactive modules, polygons and circle

**Abstract:** This dissertation's primary purpose is to develop some dynamic and interactive constructions with the support of GeoGebra, which will help in the teaching/learning of geometry. The dissertation focuses on the construction of interactive applications which will help in the understanding of the formulas used for the calculation of the areas of polygons and of the circle.

First of all, it is given an illustration of the calculation formula of the area of the rectangle, followed by the illustration of the calculation formulas of the parallelogram, the triangle, the trapezium, the kite, and, finally, the circle. Whenever relevant, the figures are broken down and "transformed" into an equivalent rectangle (with the same area).

It was sought that the transformations used would help understand the expressions obtained for the calculation of the area of each figure.



## Índice

Índice.....	1
Índice de figuras .....	3
Capítulo 1 - Introdução .....	7
Capítulo 2 - O <i>GeoGebra</i> .....	11
Capítulo 3 - Fórmula de cálculo da área do retângulo.....	17
3.1. Retângulo com dimensões variáveis.....	17
3.2. Retângulo com dimensões que não são números inteiros .....	23
Capítulo 4 - Fórmula de cálculo da área do paralelogramo .....	27
Capítulo 5 - Fórmula de cálculo da área do triângulo .....	33
5.1. Como determinar a área de um triângulo?.....	33
5.2. Um segundo olhar sobre a fórmula de cálculo da área de um triângulo .....	35
5.3. Uma terceira explicação sobre como calcular a área de um triângulo.....	37
Capítulo 6 - Fórmula de cálculo da área do trapézio .....	41
6.1. Área do trapézio .....	41
6.2. O porquê da fórmula do cálculo da área do trapézio: outra visão.....	43
Capítulo 7 - Fórmula de cálculo da área do papagaio .....	47
Capítulo 8 - Fórmula de cálculo da área do círculo .....	53
Capítulo 9 - Conclusão .....	65
9.1 Trabalho futuro .....	65
9.2 Conclusões.....	65
Bibliografia.....	67
Anexos .....	2
1. DVD com animações em formato .ggb e HTML2. Fórmula de cálculo da área do retângulo.....	4
2. Fórmula de cálculo da área do retângulo .....	6
2.1. Retângulo com dimensões variáveis.....	7
2.1.1. Ilustração <i>applet</i> .....	7
2.2. Retângulo com dimensões que não são números inteiros .....	9
2.2.1. Ilustração <i>applet</i> .....	9
2.2.2. Protocolo de construção .....	10
3. Fórmula de cálculo da área do paralelogramo .....	13
3.1. Ilustração <i>applet</i> .....	13
4. Fórmula de cálculo da área do triângulo .....	16

4.1. Como determinar a área de um triângulo? .....	17
4.1.1. Ilustração <i>applet</i> .....	17
4.1. 2. Protocolo de construção .....	18
4.2. Um segundo olhar sobre a fórmula de cálculo da área de um triângulo .....	20
4.2.1. Ilustração <i>applet</i> .....	20
4.2. 2. Protocolo de construção .....	21
4.3. Uma terceira explicação sobre como calcular a área de um triângulo.....	23
4.3.1. Ilustração <i>applet</i> .....	23
4.3. 2. Protocolo de construção .....	24
5. Fórmula de cálculo da área do trapézio .....	26
5.1. Área do trapézio .....	27
5.1.1. Ilustração <i>applet</i> .....	27
5.1. 2. Protocolo de construção .....	28
5.2. O porquê da fórmula do cálculo da área do trapézio: outra visão.....	30
5.2.1. Ilustração <i>applet</i> .....	30
5.2. 2. Protocolo de construção .....	31
6. Fórmula de cálculo da área do papagaio .....	33
6.1. Ilustração <i>applet</i> .....	33
6.2. Protocolo de construção .....	34
7. Fórmula de cálculo da área do círculo .....	37
7.1. Ilustração <i>applet</i> .....	37
7.2. Protocolo de construção .....	38

## Índice de Figuras

Figura 1 - Janela do <i>GeoGebra</i> .....	13
Figura 2- Exemplo da janela de configurações dos seletores .....	18
Figura 3 - Comando para criação de lista (sequência de translações horizontais) .....	18
Figura 4 - Comando criação de lista (sequência de translações dos objetos de uma lista) .....	19
Figura 5 - Ilustração da ativação das caixas booleanas. ....	19
Figura 6 - Exemplo de como configurar as condições para mostrar um objeto .....	20
Figura 7 – Movimentação de seletores e alteração valor lógico variáveis booleanas .....	21
Figura 8 - Criação de caixa de texto com chamada dos valores dos seletores .....	21
Figura 9 - Configuração da programação do botão “Reiniciar” .....	22
Figura 10 – Representação da unidade de área UA .....	23
Figura 11 - Decomposição do retângulo [ACBD] na unidade de área UA .....	24
Figura 12 - Decomposição do retângulo [ACBD] tendo em conta a unidade de área UA2 .....	25
Figura 13 - Decomposição do retângulo [ACBD] tendo em conta a unidade de área UA3 .....	25
Figura 14 – Decomposição do paralelogramo em dois triângulos retângulos geometricamente iguais e um retângulo .....	27
Figura 15 - Configuração de um botão.....	28
Figura 16 - Decomposição do paralelogramo depois de efetuada a translação .....	29
Figura 17 - janela de configuração da programação do botão “Iniciar Animação” quando se clica sobre ele .....	30
Figura 18 - Decomposição que surge quando $a < 0$ , $a = 0$ e $a > 0$ , respetivamente.....	31
Figura 19 - Escolha do triângulo pela movimentação do seletor “Ponto C” .....	33
Figura 20 - Módulo interativo para ilustrar a fórmula de cálculo da área do triângulo por analogia com a fórmula de cálculo da área do paralelogramo. ....	34
Figura 21 - Decomposição do triângulo [ABC] em dois triângulos retângulos e um quadrilátero.....	35
Figura 22 – Ilustração da fórmula de cálculo da área do triângulo por analogia com a fórmula de cálculo da área do retângulo. ....	36
Figura 23 – Triângulo, que não tem nenhum lado na horizontal, cuja base é o lado maior e os ângulos adjacentes à mesma são agudos.....	37

Figura 24 - Determinação do ponto de interseção da reta perpendicular à base que passa no ponto B, com a base, ponto D.....	37
Figura 25- Decomposição do triângulo em dois triângulos retângulos .....	38
Figura 26 – Visão final do módulo interativo para ilustrar a fórmula de cálculo da área do triângulo, por analogia com a fórmula de cálculo da área do retângulo.....	39
Figura 27 - Imagem final da ilustração da fórmula de cálculo da área do triângulo, tendo por base um triângulo cuja base é o lado maior, os ângulos adjacentes à mesma são agudos, quando o mesmo não tem a sua base na posição horizontal .....	39
Figura 28 - Decomposição do trapézio em dois trapézios .....	41
Figura 29 - Transformação do trapézio num paralelogramo.....	42
Figura 30 – Decomposição obtida para ilustrar a fórmula do cálculo da área do trapézio, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo, decompondo inicialmente em dois trapézios.....	43
Figura 31 - Decomposição do trapézio em dois triângulos retângulos e um hexágono ....	44
Figura 32 – Animação que ilustra a fórmula do cálculo da área do trapézio, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo, decompondo inicialmente em dois triângulos retângulos e num hexágono. ....	45
Figura 33 - Decomposição do papagaio em quatro triângulos retângulos .....	47
Figura 34 - Retas perpendiculares a $[AD_1]$ nos pontos A e $D_1$ , r e s respetivamente.....	48
Figura 35 - Criação do efeito de "reflexão" faseada .....	48
Figura 36 - Decomposição do papagaio após reflexão dos triângulos $[AEC]$ relativamente à reta r e $[CD_1E]$ relativamente à reta s.....	50
Figura 37 – Ilustração da fórmula de cálculo da área do papagaio, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo. ....	51
Figura 38 - Exemplo da animação da ilustração do porquê da fórmula do cálculo da área do círculo, quando se clica no ponto 1.....	54
Figura 39 - Início da decomposição do círculo em triângulos.....	54
Figura 40 - Decomposição do círculo em triângulos.....	55
Figura 41 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto $C_1$ ) .....	56
Figura 42 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto $A_1$ ) .....	56
Figura 43 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto $B_1$ ) .....	57
Figura 44 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto $A_2$ , $C_2$ e $B_1$ ).....	58
Figura 45 - Ilustração da construção da decomposição do círculo em triângulos.....	58
Figura 46 - Ilustração da decomposição do círculo em triângulos.....	59
Figura 47 - Configuração dos vetores indicativos das medidas dos comprimentos.....	60

Figura 48 – Marcação do ponto médio de $[A'B]$ . .....	60
Figura 49 - Ilustração da decomposição do círculo em triângulos – transformação num paralelogramo (com parte da rotação efetuada) .....	61
Figura 50 - Ilustração da decomposição do círculo em triângulos – transformação num paralelogramo.....	61
Figura 51 - Construção para ilustrar a fórmula do cálculo da área do círculo, com a transformação do círculo num paralelogramo .....	62
Figura 52 - Visão global do módulo interativo para ilustrar a fórmula de cálculo da área do círculo, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo.....	63





## Capítulo 1 - Introdução

Este trabalho foi elaborado no âmbito da dissertação do Mestrado em Matemática para Professores e foi um desafio muito interessante por aliar as novas tecnologias à Matemática. O *software* utilizado, o *GeoGebra*, revelou-se uma ótima ferramenta pois permitiu criar animações interativas, que ilustram as fórmulas do cálculo de áreas de polígonos e do círculo, dando ao utilizador a possibilidade de proceder a uma análise cuidada das construções, avançando ou recuando até conseguir tirar as conclusões necessárias.

Conforme as orientações dadas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) “desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objectos bi e tridimensionais”. (p. 47)

A matemática deve fazer sentido para os alunos, devendo estes reconhecer, procurar e encontrar explicações para os padrões observados e para os procedimentos usados, de modo a desenvolver um conhecimento profundo da matemática. (NCTM, 2000)

No âmbito deste trabalho vamos designar por módulo dinâmico um applet interativo, constituído por uma construção geométrica acompanhada da explicação dos passos seguidos ao longo da mesma.

A utilização de *applets* do *GeoGebra* é importante pois permite aos alunos interagirem com objetos matemáticos, quer estejam previamente construídos, quer sejam construídos por eles, facilitando por isso a aquisição de conhecimentos.

Todas as animações elaboradas no âmbito deste trabalho foram construídas utilizando a versão 4.2 do *GeoGebra*. Tiveram por base as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007)<sup>1</sup> e as constantes na brochura de geometria disponibilizada pelo Ministério da Educação (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011).

Como este foi o primeiro contacto com o programa, um elemento fundamental para o desenvolvimento do trabalho foi o manual do *GeoGebra* (Hohenwarter, J.&

---

<sup>1</sup> Já o trabalho estava a ser desenvolvido quando o atual Ministério da Educação decidiu revogar este Programa, facto ao qual somos completamente alheios.

Hohenwarter, M, (2009)), bem como o site disponibilizado com esclarecimentos diversos (GeoGebra, 2012).

Foram consultadas várias páginas da internet que permitiram esclarecer dúvidas sobre o modo de funcionamento do *software* e visualizar algumas construções já elaboradas. A título de exemplo referem-se as seguintes: Sada, (2005), Knote, (2012).

Os módulos desenvolvidos destinam-se a ser utilizados individualmente pelos alunos que estejam a aprender as fórmulas de cálculo de áreas de polígonos (retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio, papagaio) e do círculo. O facto de todos eles serem interativos permite aos alunos explorarem os passos da transformação dos polígonos/círculo que levam à fórmula do cálculo da área. Procurou-se que as transformações tivessem por base, quando pertinente, a fórmula de cálculo da área do retângulo, fórmula esta explorada inicialmente em dois módulos de base.

Esta dissertação está dividida em duas partes: este documento que constitui a parte escrita, e os módulos interativos elaborados em formato .ggb e exportados para HTML, que se encontram no DVD em anexo. Note-se que esta parte escrita não traduz a parte principal do trabalho que consistiu na construção dos módulos dinâmicos constantes no DVD.

A parte escrita está dividida em nove capítulos. O primeiro consiste numa introdução que procura enquadrar o tema, o segundo fala sobre o *GeoGebra*, vantagens associadas à sua utilização e algumas das ferramentas utilizadas. Os seis capítulos seguintes são destinados à descrição das construções elaboradas no âmbito deste trabalho. O terceiro capítulo destina-se a explicar a construção dos dois módulos dinâmicos elaborados para ilustrar a fórmula de cálculo da área do retângulo, o primeiro (subcapítulo 3.1.) com base em retângulos de lados com medidas inteiras e o segundo (subcapítulo 3.2.) com base num retângulo com medidas fracionárias. No quarto capítulo é explicada a forma como foi elaborado o *applet* para ilustrar a fórmula de cálculo de área do paralelogramo. Já o quinto capítulo visa a explicação da construção dos três módulos dinâmicos criados para ilustrar a fórmula de cálculo da área do triângulo. Está dividido em três subcapítulos, o subcapítulo 5.1 explica a ilustração da fórmula do cálculo de área do triângulo por analogia com a fórmula do cálculo da área do paralelogramo. O subcapítulo 5.2 pretende explicar a construção dinâmica criada para ilustrar a fórmula do cálculo da área do triângulo, a partir de um triângulo, cujo lado maior é considerado a base, encontra-se na posição horizontal e os ângulos adjacentes à base são agudos. Já o subcapítulo 5.3, tem como objetivo explicar a construção do *applet* que ilustra a fórmula de cálculo de área do triângulo, partindo de um triângulo em que o lado maior é

considerado a base, não está na posição horizontal e os ângulos adjacentes à base são agudos. O sexto capítulo está dividido em dois subcapítulos e destina-se a explicar as duas construções interativas elaboradas para ilustrar a fórmula de cálculo da área do trapézio propriamente dito. No sétimo capítulo é explicada a construção dinâmica efetuada para ilustrar a fórmula de cálculo de área do papagaio. Já o oitavo capítulo visa explicar a elaboração do módulo dinâmico criado para ilustrar a fórmula de cálculo da área do círculo.

O último capítulo contém as conclusões do trabalho e refere algumas sugestões de trabalho futuro, nomeadamente a utilidade que construções semelhantes às utilizadas no âmbito deste trabalho podem ter como ferramentas de auxílio ao estudo de outros tópicos de geometria, dando como exemplo o estudo da circunferência, de ângulos inscritos, ao centro e excêntricos, do nono ano de escolaridade.



## Capítulo 2 - O GeoGebra

O *GeoGebra* é um programa de geometria dinâmica, gratuito, de fácil utilização por ser bastante intuitivo e sobre o qual existe bastante informação em várias línguas, incluindo o português e o inglês (há um site oficial que disponibiliza o manual de utilização (GeoGebra, 2012), o *software* em português, informação partilhada por outros utilizadores e um fórum onde podemos colocar dúvidas para tentar superar os obstáculos que vão surgindo com a utilização do programa).

O *GeoGebra* foi criado no final de 2001, por Markus Hohenwarter. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. O GeoGebra foi premiado várias vezes quer no continente Europeu, quer no Americano. Está traduzido em cinquenta línguas, é utilizado em cento e noventa países, disponibiliza vinte e cinco mil ficheiros online (GeoGebraTube) e estima-se que seja utilizado por vinte milhões de pessoas. (Markus Hohenwarter, 2013)

Nestes doze anos de existência, o *GeoGebra* tem vindo a sofrer uma enorme evolução. Começou por ser um *software* que aliava a geometria e a álgebra e atualmente é possível trabalhar ainda tabelas, gráficos, estatística e cálculo simbólico. A versão mais recente que está estabilizada é a 4.2 e foi lançada em dezembro de 2012. Algumas das funcionalidades novas que esta versão tem relativamente à anterior são a vista CAS (nova vista simbólica que permite trabalhar com frações e variáveis definidas por letras); está mais rápida a executar os comandos.

No verão deste ano será lançada uma nova versão (4.4) que além de ter mais funcionalidades no que respeita ao trabalho com estatística e folha de cálculo, possibilitará trabalhar com curvas implícitas, vai permitir trabalhar com este *software* no quadro interativo, com recurso à caneta, permitirá fazer desenho livre, disponibilizará um teclado virtual e será possível trabalhar com o GeoGebra no iPad e nos tablets

Segundo o autor do *GeoGebra*, no próximo ano será lançada a versão 5.0 Beta, que entre outras coisas, permitirá construir gráficos em 3D e demonstrar teoremas. (Markus Hohenwarter, 2013)

Ao usar o *GeoGebra* podemos ver os objetos matemáticos em quatro perspetivas: na zona gráfica observamos a representação gráfica de objetos (por exemplo, pontos, polígonos, ...), na zona algébrica podemos ver a definição algébrica de objetos (por exemplo, as coordenadas dos pontos, a equação que define o círculo, ...), na folha de cálculo podemos inserir todo tipo de objetos matemáticos e, caso seja possível, o

*GeoGebra* mostra a representação gráfica do objeto inserido na folha (esta não foi utilizada para a construção dos *applets*) e a folha CAS que permite o uso do sistema de álgebra computacional (CAS) para cálculos simbólicos (podem inserir-se variáveis às quais não foi atribuído um valor numérico, trabalhar com frações, entre outras funcionalidades).

A qualquer momento podemos ver o protocolo de construção que nos mostra os passos que foram seguidos ao longo da sessão.

O recurso a este *software* de Geometria Dinâmica é pertinente no seguimento das orientações efetuadas no Plano de Matemática do Ensino Básico, que refere o seguinte: “Os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os *applets* favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem também ser utilizados.” (NMTC, 2007).

Além disso, Breda et al., (2011). pág. 17, referem que “na representação de objectos geométricos, a utilização do computador e em particular dos programas de geometria dinâmica é recomendada.”

Uma grande vantagem das construções dinâmicas elaboradas no *GeoGebra* é poderem exportar-se para HTML, o que possibilita a sua visualização em qualquer computador que tenha um browser WEB instalado, não sendo necessário que o computador tenha o *GeoGebra*. Outra mais-valia das animações em HTML é as mesmas não poderem ser deformadas pelo utilizador. Além disso, aumentando ou diminuindo o zoom é possível contornar os problemas causados pela alteração da resolução do ecrã, por exemplo, quando se liga um projetor de vídeo ao computador, ou quando o monitor do computador é de dimensão reduzida.

Vamos proceder a uma breve explicação sobre o programa e sobre as ferramentas utilizadas nas animações elaboradas no âmbito deste trabalho.

Ao abrir o programa aparece a janela seguinte:

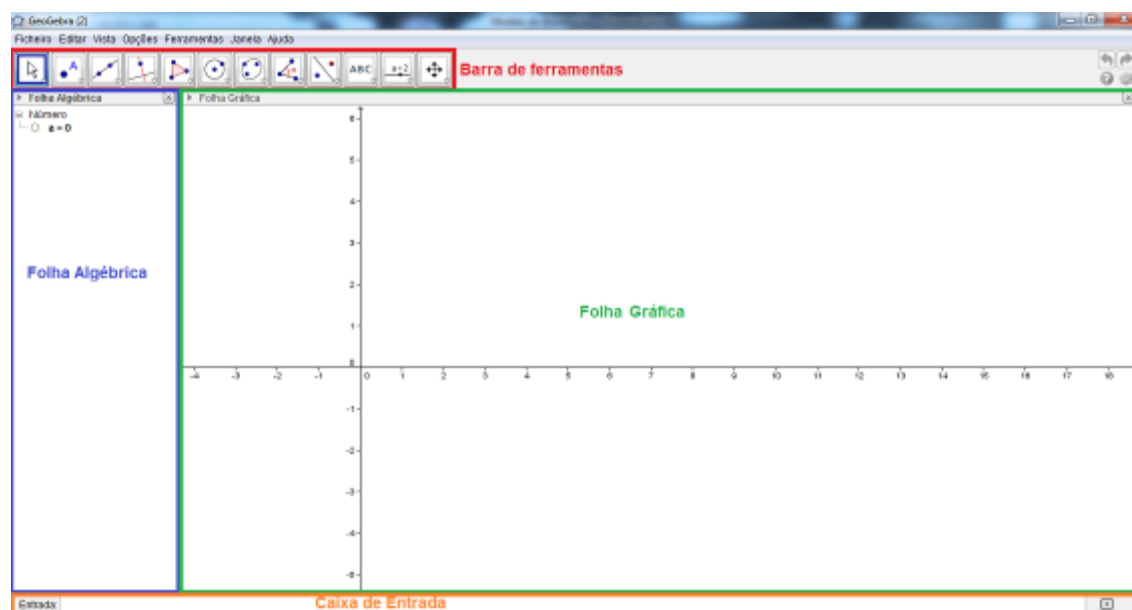
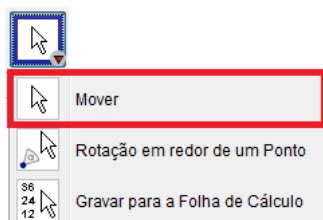


Figura 1 - Janela do GeoGebra

A barra de ferramentas possibilita um acesso rápido e intuitivo às ferramentas cujos ícones se encontram representados e estão organizados tendo em conta a natureza dos objetos resultantes. As ferramentas obtidas recorrendo à barra de ferramentas permitem representar objetos na folha gráfica e surge automaticamente a sua representação na folha algébrica. O Campo “Entrada” permite inserir manualmente expressões algébricas no *GeoGebra*, fazendo aparecer a sua representação gráfica quando se clica no *Enter*. É sempre possível efetuar alterações aos objetos quer na folha gráfica, quer na folha algébrica, fazendo-se automaticamente a atualização quando se clica no *Enter*.

As ferramentas utilizadas no âmbito deste trabalho, por menu, foram as que estão assinaladas a vermelho:



Permite selecionar e/ou mover objetos.



	Novo Ponto
	Ponto no Objeto
	Ligar/Desligar Ponto
	Interseção de Dois Objetos
	Ponto Médio ou Centro
	Número Complexo

Permite criar pontos novos clicando na folha gráfica.

Permite criar os pontos de interseção de duas linhas.

Permite criar o ponto médio entre dois pontos ou num segmento de reta



	Reta (Dois Pontos)
	Segmento de Reta (Dois Pontos)
	Segmento com comprimento fixo
	Semirreta (Dois Pontos)
	Linha Poligonal
	Vetor (Origem, Extremidade)
	Vetor aplicado num Ponto

Permite criar um segmento de reta definido por dois pontos.

Permite criar um vetor definido por dois pontos.



	Reta Perpendicular
	Reta Paralela
	Mediatriz
	Bissetriz
	Tangentes
	Reta Polar ou Diametral
	Reta de Regressão Linear
	Lugar Geométrico

Permite criar uma reta que passe num ponto e seja perpendicular a uma reta dada.

Permite criar uma reta que passe num ponto e seja paralela a uma reta dada.



	Polígono
	Polígono Regular
	Polígono Rígido

Permite criar um polígono unindo pontos.

Permite criar um polígono regular, tendo 2 pontos e o número de lados.





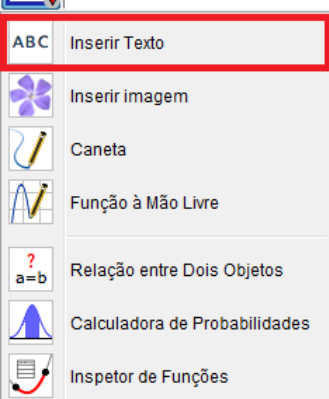
Permite criar uma circunferência tendo o centro e o raio.



Permite fazer uma reflexão de um objeto em relação a um eixo.






Permite fazer a reflexão de um objeto, tendo o centro e a amplitude da rotação.

Permite fazer a translação de um objeto tendo o vetor.











Permite criar caixas de texto.

---

		
	Seleção	Permite representar graficamente um número ou um ângulo livres.
	Caixa para Mostrar/Esconder Objetos	Permite criar caixas para exibir/ocultar objetos.
	Inserir Botão	Permite inserir um botão.
	Inserir Caixa de Texto	

---

		
	Arrastar a Folha Gráfica	Permite arrastar a folha gráfica.
	Ampliar	Permite ampliar a construção.
	Reduzir	Permite reduzir a construção.
	Mostrar/Esconder Objeto	
	Mostrar/Esconder Rótulo	
	Copiar Estilo Visual	
	Apagar Objeto	

Além destas ferramentas usaram-se outras que vão ser referidas ao longo dos capítulos seguintes, entre as quais se destaca a criação de listas através do comando sequências.

## Capítulo 3 - Fórmula de cálculo da área do retângulo

Com os dois primeiros módulos interativos que se elaboraram pretende-se ilustrar a fórmula de cálculo da área do retângulo, a qual servirá como base de trabalho em quase todos os restantes módulos interativos. Estes *applets* foram pensados para ilustrar a fórmula de cálculo da área do retângulo, tendo em conta a noção/definição de área, ou seja, calcular/contar o número de unidades de área que “cabem” na área que se pretende medir.

Foram elaboradas duas construções dinâmicas, uma com base em retângulos de lados com medidas inteiras e outra com base num retângulo com medidas fracionárias.


As próximas secções descrevem os passos seguidos na elaboração destes módulos. Pretende-se não só explicar o trabalho efetuado mas também fornecer material de ajuda a utilizadores iniciantes no *GeoGebra*. Aconselha-se, se possível, a explorar as animações antes de efetuar a leitura do texto que se segue.

### 3.1. Retângulo com dimensões variáveis

A primeira construção permite ao utilizador definir o número inteiro de unidades de comprimento a contabilizar na base e na altura, entre um e dez. Esta construção pretende, entre outras coisas, ajudar o utilizador a entender que o quadrado é um retângulo cujas medidas dos comprimentos dos lados são iguais.

Atendendo a que se pretendia dar a liberdade ao utilizador de selecionar o número de unidades de comprimento da base e da altura do retângulo definiram-se dois seletores (“Base” e “Altura”).

Ambos os seletores foram configurados para que os seus valores variassem entre um e dez, com incremento de um valor.

Para executar estes passos clicou-se no ícone , existente na barra de ferramentas e depois clicou-se na folha gráfica (nossa área de trabalho), no local onde pretendíamos que ficasse o seletor. O seletor “Altura” foi configurado para que ficasse na vertical e o da “Base” na horizontal (ver *Figura 2*).

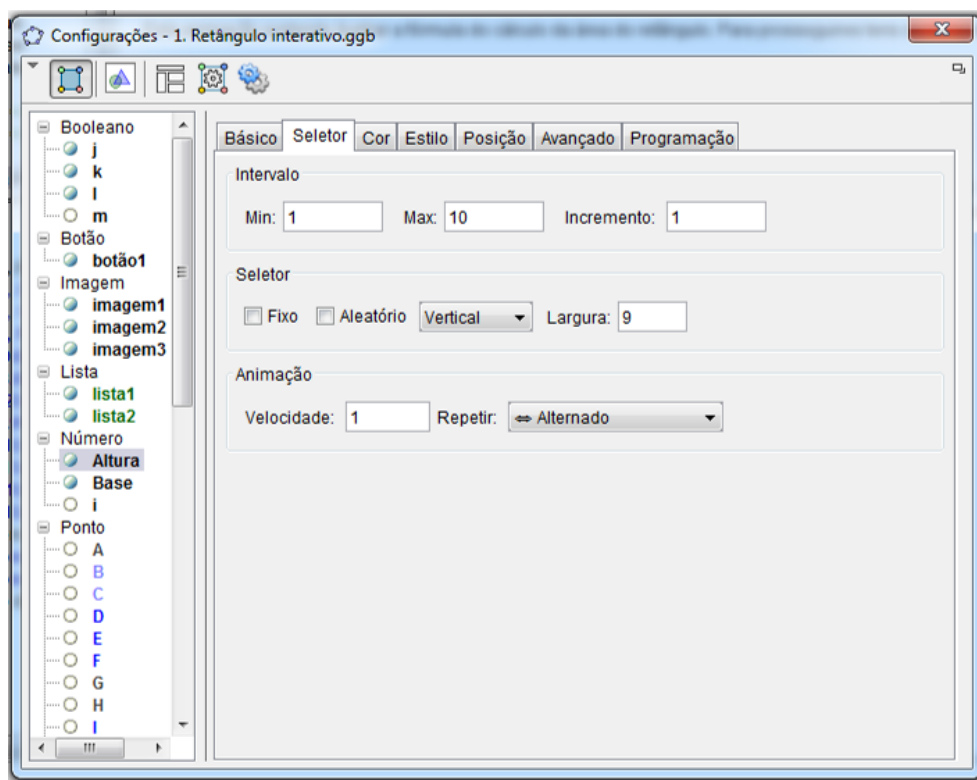


Figura 2- Exemplo da janela de configurações dos seletores

Desenhou-se a unidade de área, neste caso um quadrado cuja medida de comprimento dos seus lados é um, unindo-se quatro pontos previamente marcados, sendo um deles a origem do referencial. O objetivo seguinte era fazer uma translação dessa unidade de área na horizontal e/ou na vertical, até que o retângulo tivesse tantas unidades de comprimento da base e da altura quantas se quisesse (entre 1 e 10). As translações estão associadas a um vetor por isso houve necessidade de definir dois vetores, o vetor  $\vec{u}$ , com medida de comprimento um, direção horizontal e sentido da esquerda para a direita e o vetor  $\vec{v}$ , com a mesma medida de comprimento, direção vertical e sentido de baixo para cima.

De seguida definiram-se duas listas, a primeira que faz uma sequência de translações horizontais da unidade de área, que pode variar entre 0 e 9, clicou-se no campo de entrada e escreveu-se o seguinte comando:

Entrada: `sequência[translação[polígono1, vetor(n u)], n, 0, Base-1]`



Figura 3 - Comando para criação de lista (sequência de translações horizontais)

Este comando faz uma sequência de translações do polígono1, segundo um vetor  $n\vec{u}$ , com o n a variar entre 0 e 9 e permite que à medida que se desloca o seletor “Base”, vão aumentando/diminuindo o número de unidades de área posicionadas lateralmente

(no mínimo temos uma, no máximo temos 10). A segunda lista faz uma sequência de translações verticais da primeira lista, ou seja, à medida que deslocamos o seletor “Altura” aumentamos/diminuímos o número de vezes que as unidades de área posicionadas lateralmente na primeira linha se repetem (no mínimo temos uma linha, no máximo temos 10 linhas. Para definir esta translação foi inserida na caixa de entrada a seguinte condição:

Entrada: `sequência[translação[lista1, vetor[n v], n, 0, Altura-1]]`

Figura 4 - Comando criação de lista (sequência de translações dos objetos de uma lista)

Para facilitar a percepção, foram inseridas caixas de texto, clicando no ícone , da barra de ferramentas, e de seguida no local da folha gráfica onde se pretendia colocar a caixa de texto, que explicam passo a passo, o que está a ocorrer na animação. Para garantir que a informação é apresentada no momento adequado, foram utilizadas caixas booleanas que mostram ou ocultam objetos da animação. Estas foram inseridas clicando no ícone  e clicando de seguida no local da folha gráfica onde se pretendiam posicionar. Por exemplo, para dar início à animação, o utilizador tem de clicar na caixa booleana com legenda 1., pois dessa forma define o seu valor lógico como “true”, o que ativa o aparecimento dos objetos associados a essa caixa booleana bem como o aparecimento da caixa booleana 2. (ver Figura 5).

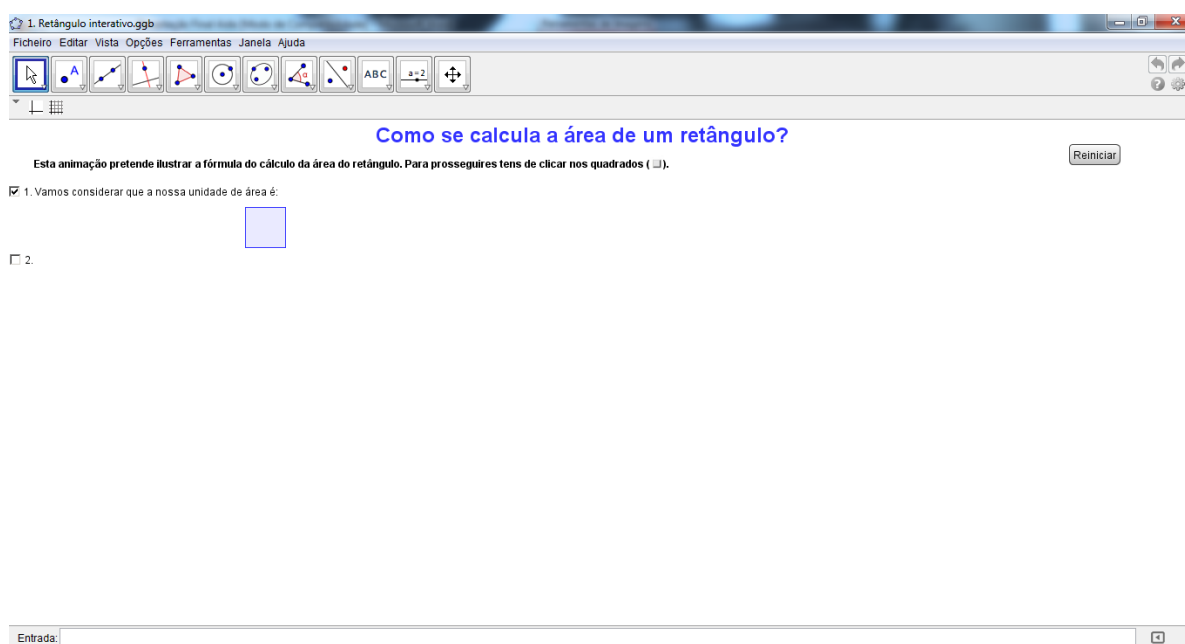


Figura 5 - Ilustração da ativação das caixas booleanas.

Isto acontece porque em cada objeto se define quais as condições para que ele apareça. Por exemplo, conforme se pode ver na imagem abaixo, a caixa de texto referente à fórmula de cálculo da área do retângulo só aparece quando as variáveis booleanas referentes aos pontos 1., 2., 3. e 4. têm valor lógico true. Para isso, clica-se com o botão do lado direito do rato sobre a caixa de texto, selecciona-se a opção **propriedades**, o separador **avanzado** e escreve-se no campo **condição para mostrar o objeto**, a condição ou conjunção/disjunção de condições necessárias. Neste caso definiu-se que a caixa de texto só pode aparecer quando as quatro variáveis booleanas tiverem valor lógico *true*.

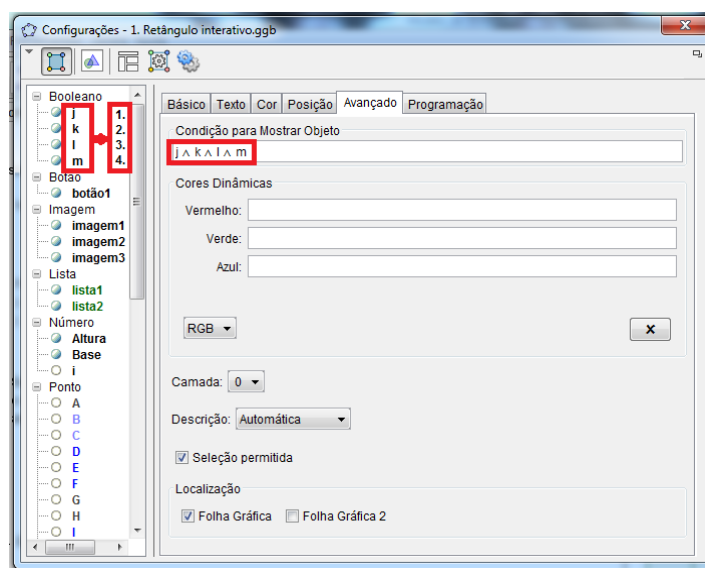


Figura 6 - Exemplo de como configurar as condições para mostrar um objeto

Ao clicar no ponto 2. surge a explicação de como se deve proceder para definir o retângulo fazendo variar o número de unidades de comprimento da base e da altura nos respetivos seletores. Além disso aparece o operador booleano seguinte (3.).

Conforme se pode ver na imagem seguinte, foram inseridas imagens de seletores para clarificar a explicação dada na caixa de texto associada à variável booleana identificada com o ponto 2., bem como a imagem da caixa booleana na frase introdutória ao módulo, para explicar aos utilizadores como têm de fazer para prosseguir com a animação. Para isso fiz um print screen da janela e coleí no Paint, de seguida copieí parte do seletor e seleccioneí o menu **Editar, Inserir Imagem de, Área de Transferência**. A imagem surge na zona gráfica, podendo ser definidos, entre outros aspetos, as suas dimensões e a sua posição na folha gráfica.

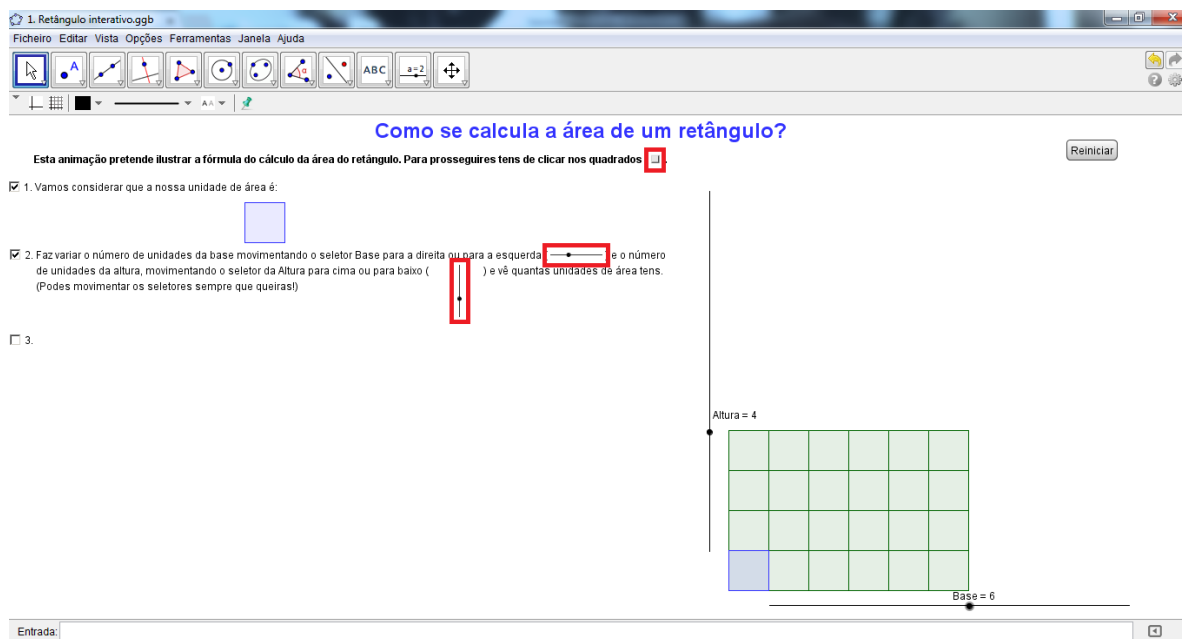


Figura 7 – Movimentação de seletores e alteração valor lógico variáveis booleanas

Ao clicar no 3. foi criada uma caixa de texto que mostra as alterações do número de unidades de comprimento da base e da altura, bem como a influência que essas variações têm na área do retângulo que se define. Para isso definiu-se um número que é o produto dos valores dos seletores base e altura e na caixa de texto utilizada “chamaram-se” os valores dos seletores “Base” e “Altura” e do número definido como o produto entre estes dois (i).

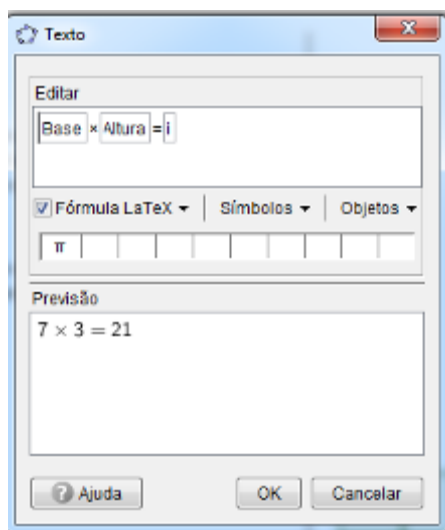


Figura 8 - Criação de caixa de texto com chamada dos valores dos seletores

No final pretende-se que o utilizador perceba que a fórmula de cálculo da área do retângulo é o produto das medidas de comprimento da base e da altura. Foi importante

considerar um modelo retangular para a compreensão da multiplicação, pois o programa de Matemática (Ministério da Educação, 2007) refere que se deve: “Propor aos alunos situações em que o modelo rectangular seja o adequado para resolver a situação.” (p. 16), para que ele possa “Compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório.” (p. 16)

Em todas as animações foi definido um botão denominado “Reiniciar” que permite ao utilizador reiniciar a animação rapidamente. Definiu-se que quando se clica nesse botão, todos os valores das variáveis são definidos como os valores iniciais e o valor lógico das variáveis booleanas definido como “false”. Usa-se a função DefinirValor conforme se pode ver na imagem abaixo.

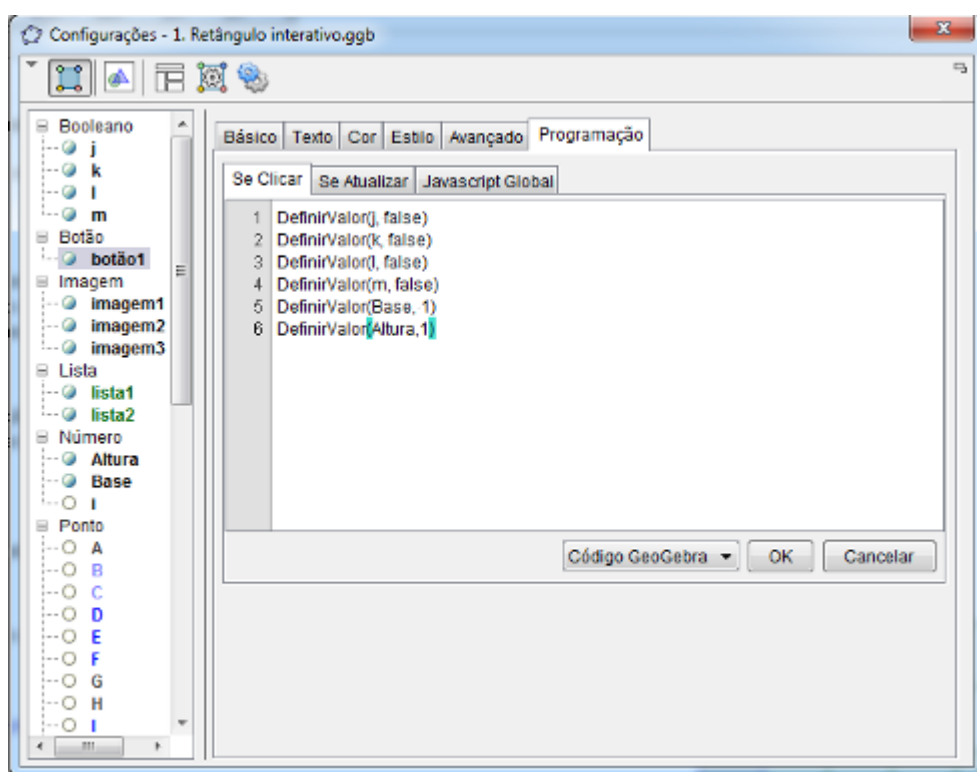


Figura 9 - Configuração da programação do botão “Reiniciar”.

Atendendo a que esta foi uma das primeiras animações elaboradas, a maior dificuldade sentida foi encontrar as funções que permitissem fazer o que pretendíamos e perceber como funcionavam. Além disso houve necessidade de perceber como se trabalhava com os seletores e como se definia o que se pode ver em cada ponto da animação. Para superar estas dificuldades foi necessário efetuar muita pesquisa nos fóruns dedicados ao *GeoGebra*, analisar o manual e recorrer ao método de tentativa e erro.



### 3.2. Retângulo com dimensões que não são números inteiros

A segunda construção pretende ilustrar o cálculo da área do retângulo quando as dimensões não são números inteiros, mas antes fracionários.


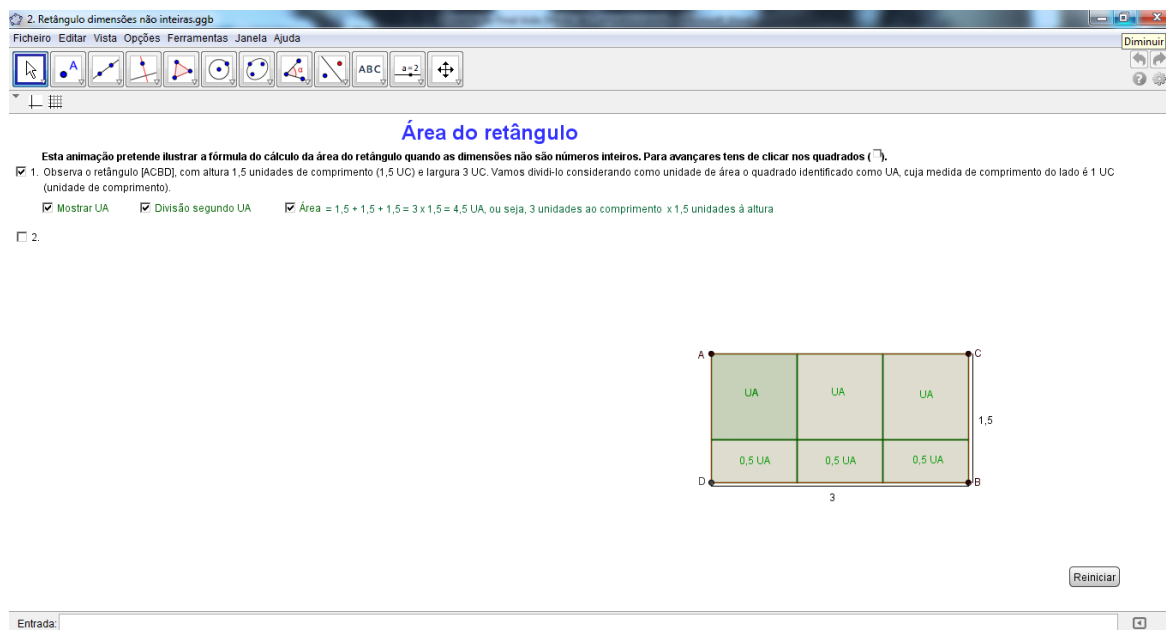
Para começar definiu-se um retângulo [ACBD] com altura 1,5 unidades de comprimento (1,5 UC) e largura 3 UC. Representou-se o ponto E (ver *Figura seguinte*) e considerou-se uma unidade de área, UA, como sendo um quadrado com 1 UC de lado. Para representar UA recorreu-se à ferramenta que permite desenhar um polígono regular, , tendo dois pontos e o número de vértices. Neste caso tínhamos os pontos A e E e o polígono que pretendíamos ia ficar com 4 vértices.



Figura 10 – Representação da unidade de área UA

De seguida, como se pretendia fazer uma divisão do retângulo inicial tendo em conta esta unidade de área, definimos um vetor  $\vec{u}$ , com direção horizontal, sentido da esquerda para a direita e medida de comprimento dois (medida de comprimento do lado da unidade UA), para de seguida se efetuar uma sequência de três translações da unidade de área UA, associadas ao vetor  $\vec{u}$  (comando inserido na caixa de entrada lista 1: Sequência[Translação[UA1, Vetor[n u]], n, 0, 2]).

Houve necessidade de assinalar metade da unidade de área UA, e depois fez-se uma sequência de três translações associada ao vetor  $\vec{u}$  (lista 2), obtendo-se a divisão do retângulo inicial segundo UA.



**Figura 11 - Decomposição do retângulo [ACBD] na unidade de área UA**

Criaram-se caixas booleanas que permitem ao utilizador mostrar/ocultar a unidade de área UA bem como a decomposição do retângulo tendo em conta essa unidade de área. Definiu-se ainda outra caixa booleana que permite mostrar/ocultar o cálculo da área do retângulo tendo em conta a UA, aqui explicitou-se mais uma vez que a área do retângulo inicial é o número total de unidades de área em que foi decomposto, ou ainda, o produto dos números de unidades de comprimentos da base e da altura.

Numa segunda fase, para facilitar a perceção, considerou-se uma nova unidade de área, um quarto da primeira, obtendo-se assim um número inteiro de unidades de comprimento da base e da altura do retângulo em estudo (ver *Figura 12*). Os procedimentos para efetuar esta decomposição foram semelhantes aos usados anteriormente. Foram definidos dois novos vetores, um horizontal e outro vertical com medida de comprimento um (dado que a medida de comprimento do lado da UA é 2), definiu-se a unidade de área (UA2) e depois uma sequência de translações horizontais e verticais que “decompõem” o retângulo inicial na unidade de área UA2 (comando inserido na caixa de entrada lista 3: Sequência[Translação[Sequência[Translação[UA2, Vetor[n v]], n, 0, 5], Vetor[m w]], m, 0, 2]).

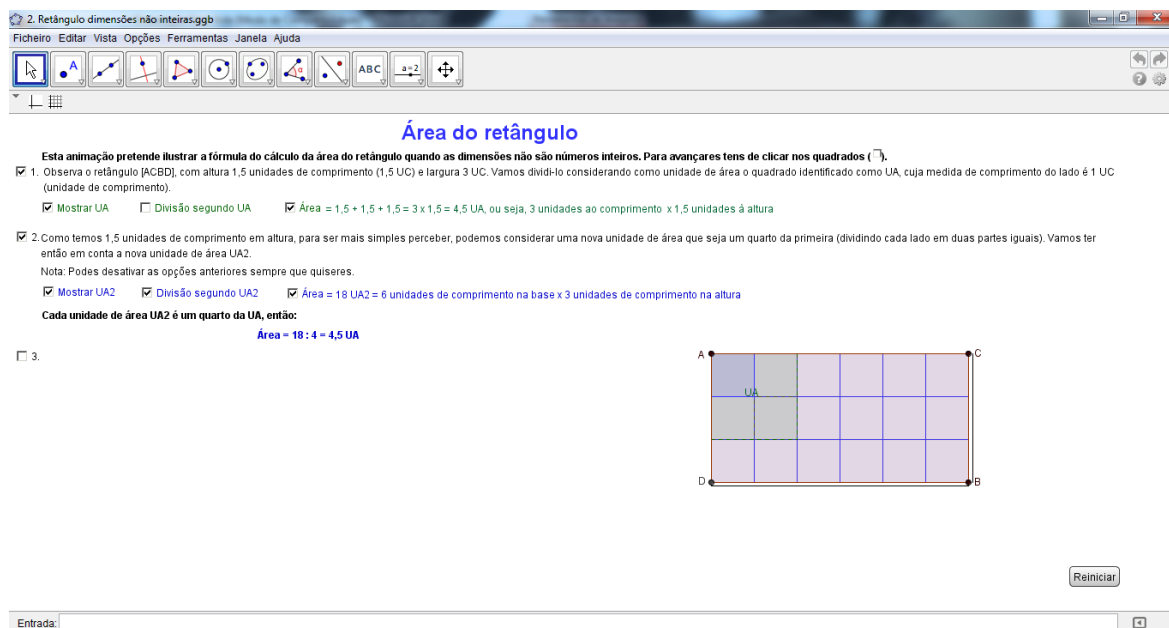


Figura 12 - Decomposição do retângulo [ACBD] tendo em conta a unidade de área UA2

Num terceiro ponto considerou-se outra unidade de área que fosse uma centésima parte da primeira, decompondo-se o retângulo inicial tendo em conta a unidade de área obtida (UA3), seguindo-se os procedimentos idênticos aos anteriores.

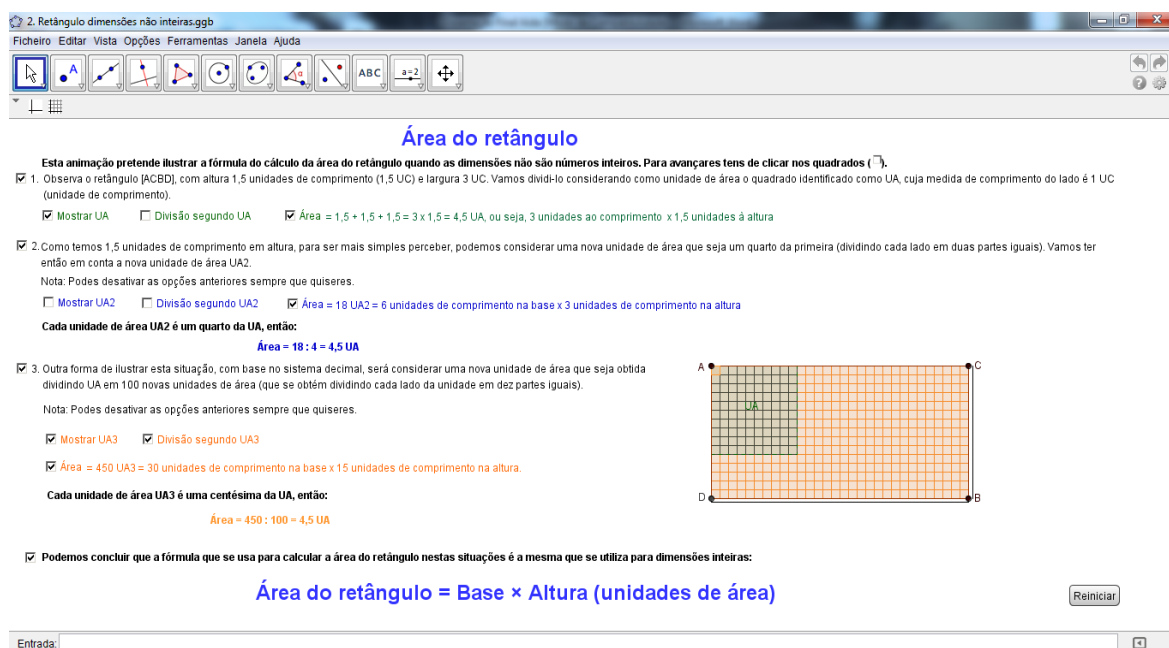


Figura 13 - Decomposição do retângulo [ACBD] tendo em conta a unidade de área UA3

Nesta animação podem-se sempre visualizar/ocultar as unidades de área já definidas, bem como as decomposições associadas a cada uma dessas unidades de

área. Nas duas últimas unidades de área apresenta-se o cálculo da área remetendo para a primeira que se considerou (UA).

Tal como na primeira animação elaborada, nesta também se definiu o botão “Reiniciar” que define todos os valores (numéricos e booleanos) tal como estavam inicialmente. Além disso, à medida que se avança na animação clicando nas caixas booleanas, vão surgindo caixas de texto que explicam os procedimentos efetuados.

Ao elaborar esta animação a maior dificuldade encontrada foi perceber como estruturar a animação para que as decomposições efetuadas não sobrecarregassem a imagem. Para superar essa dificuldade recorreu-se às caixas booleanas.

Outra dificuldade foi fazer a decomposição do retângulo inicial nas unidades de área definidas, para isso recorreu-se à elaboração de listas (definindo sequências de translações no campo entrada).

Nesta animação as dimensões do retângulo são fixas para possibilitar a decomposição do mesmo nos dois tipos de subunidades consideradas, pois o objetivo não era possibilitar a definição das dimensões mas sim mostrar que se pode decompor a figura num número inteiro de subunidades.

## Capítulo 4 - Fórmula de cálculo da área do paralelogramo

De seguida procurou-se elaborar uma animação que ilustrasse o porquê da fórmula do cálculo da área do paralelogramo, transformando-o num retângulo equivalente.

Tal como no capítulo anterior, aconselha-se, se possível, a explorar a animação antes de efetuar a leitura do texto que se segue.

Ao clicar na primeira caixa booleana, surge a representação gráfica do paralelogramo [ABDC], bem como a identificação das suas medidas dos comprimentos da base ( $b$ ) e da altura ( $h$ ). De seguida apresenta-se o paralelogramo decomposto em dois triângulos retângulos geometricamente iguais, pelo critério LLL, (assinalados a azul) e um retângulo (assinalado a castanho) (neste passo houve a necessidade de traçar a reta perpendicular a [AB] que passasse no ponto C e a reta perpendicular a [CD] que passasse no ponto B para se determinarem os pontos de interseção de cada uma dessas retas com [AB] e [CD]).

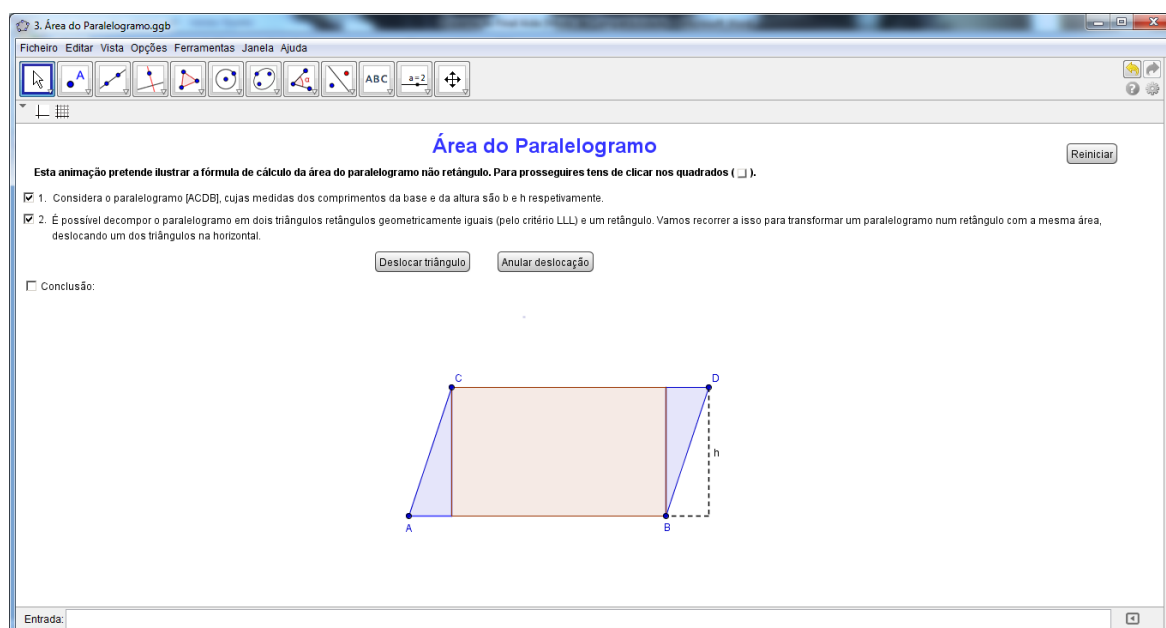

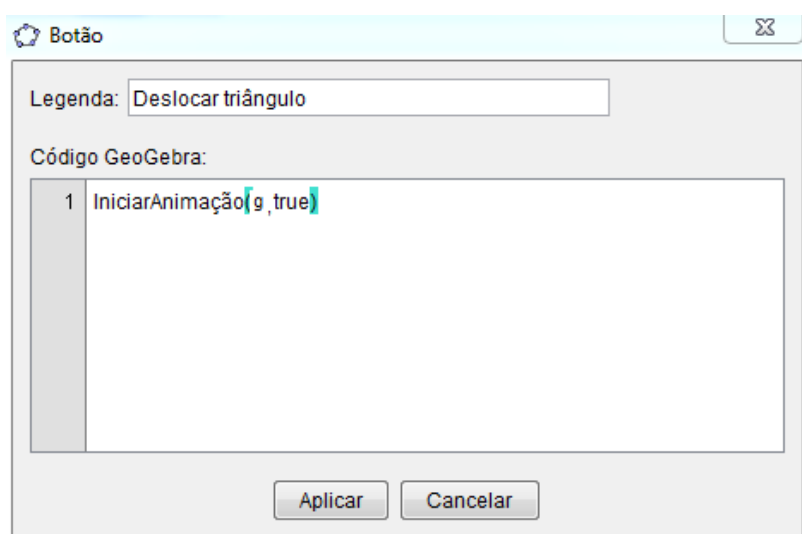


Figura 14 – Decomposição do paralelogramo em dois triângulos retângulos geometricamente iguais e um retângulo

Foram definidos dois botões: um que ao ser ativado efetua a deslocação do triângulo, e outro que ao ser ativado anula a deslocação.

Para inserir o primeiro botão clicou-se no ícone , da barra de ferramentas, depois clicou-se na folha gráfica no local onde se pretendia inserir o botão e surgiu a janela que se pode ver na *Figura* seguinte, na **legenda** escreveu-se o que se pretendia que estivesse escrito no botão, no campo **Código GeoGebra**, escreveram-se os comandos necessários para que ao clicar no botão ele fizesse o que pretendíamos. Neste caso pretendia-se criar o botão “**Deslocar triângulo**” de forma a que quando se clicasse sobre ele se fizesse a translação de um dos triângulos para que as hipotenusas dos dois triângulos ficassem sobrepostas, então no campo Código GeoGebra escreveu-se o comando `IniciarAnimação(g, true)` (que inicia a animação do seletor g).



**Figura 15 - Configuração de um botão**

O botão “**Anular deslocação**” foi criado da mesma forma, mas no campo **Código GeoGebra** escreveu-se o comando `DefinirValor(g, 0)` (que define o valor do seletor g como zero, ou seja, o valor que ele tinha antes de se efetuar a translação).

Definiu-se o vetor  $\vec{u}$  com direção horizontal, sentido da esquerda para a direita e comprimento igual ao comprimento da base do paralelogramo e o seletor numérico, g, a variar entre zero e um. Ao fazer uma translação horizontal, associada ao vetor  $g\vec{u}$ , de um dos triângulos para que as hipotenusas fiquem sobrepostas, obtém-se um retângulo equivalente conforme se pode ver na *Figura* 16. Esta translação é feita em pequenos passos vendo-se o triângulo deslizar sobre o segmento [AB], da esquerda para a direita.

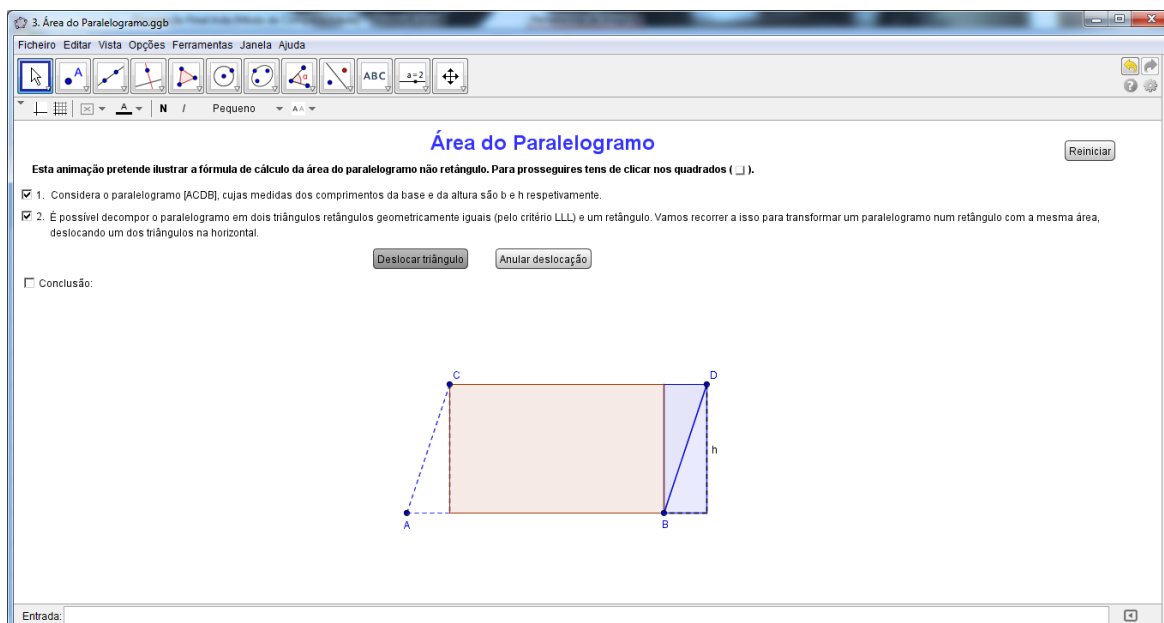


Figura 16 - Decomposição do paralelogramo depois de efetuada a translação

De seguida surge a opção para mostrar a fórmula de cálculo da área do paralelogramo por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo.

Por fim criou-se a possibilidade de deslocar o lado [CD] ao longo de uma reta paralela a [AB], mostrando que, apesar da inclinação do paralelogramo se alterar, as medidas da base e da altura mantêm-se e por conseguinte a área também se mantém. Definiu-se o seletor numérico  $a$ , a variar entre -1 e 1, e configuraram-se as coordenadas dos pontos C e D de forma a que elas dependessem deste seletor, ou seja, as coordenadas do ponto C são  $(a, 3)$  e as do ponto D são  $(a+6, 3)$ .

De seguida foram criados dois botões, um para iniciar a animação do seletor  $a$ , outro para parar a animação. Para iniciar a animação ao premir-se o botão "Iniciar Animação", clicou-se sobre o botão com o botão do lado direito do rato, selecionou-se "**propriedades do objeto**", o separador "**programação**" e a opção "**se clicar**". Depois inseriu-se o comando "IniciarAnimação( $a$ , true)", conforme se pode ver na imagem seguinte.

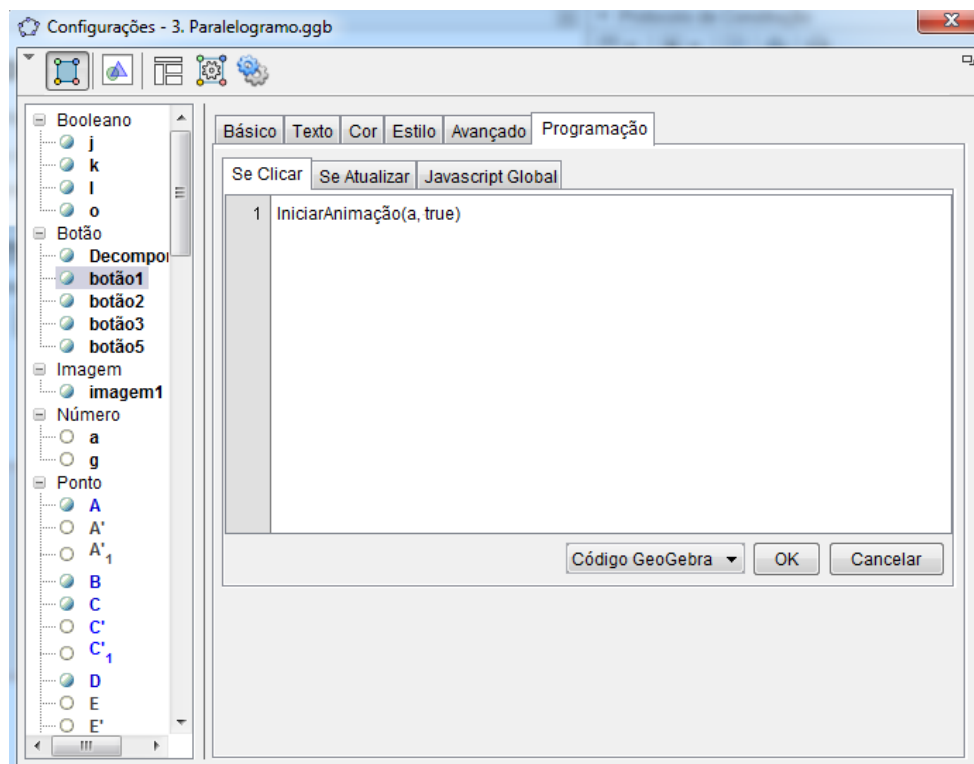


Figura 17 - janela de configuração da programação do botão “Iniciar Animação” quando se clica sobre ele

Ao clicar-se no botão “parar animação”, como o próprio nome indica, pára a animação. Para isso na opção “**programação**”, “**Se Clicar**”, inseriu-se o comando: “IniciarAnimação(a, false)”.

As maiores dificuldades sentidas para elaborar esta animação foram descobrir como utilizar os botões, como definir o seu funcionamento e fazer com que os polígonos aparecessem de forma correta quando se movimenta o lado paralelo à base.

A solução para o primeiro problema surgiu com a função IniciarAnimação, já para a segunda dificuldade houve necessidade de representar os triângulos e o retângulo resultantes da decomposição duas vezes, dado que quando o lado paralelo à base se desloca o paralelogramo também fica diferente. Assim, quando o seletor associado ao movimento toma o valor zero, a figura obtida é um retângulo, quando é menor que zero surgem uns polígonos que ficam ocultos quando o valor do seletor é maior do que zero, dando lugar a outros geometricamente iguais, mas com outra configuração.





Figura 18 - Decomposição que surge quando  $a < 0$ ,  $a = 0$  e  $a > 0$ , respetivamente.



## Capítulo 5 - Fórmula de cálculo da área do triângulo

Para ilustrar a fórmula de cálculo da área do triângulo foram elaborados três módulos dinâmicos. Mais uma vez, aconselha-se, se possível, a explorar as animações antes de prosseguir a leitura.

### 5.1. Como determinar a área de um triângulo?

Nesta primeira animação, considerou-se o triângulo [ABC], cujas medidas dos comprimentos da base e da altura são  $b$  e  $h$  respetivamente. Criou-se o seletor numérico Ponto<sub>1</sub>, a variar entre -5 e 14, que permite mover o vértice C(Ponto<sub>1</sub>, 4), sobre uma reta paralela à base, permitindo ao utilizador definir um triângulo para prosseguir com a animação (ver *Figura 19*).

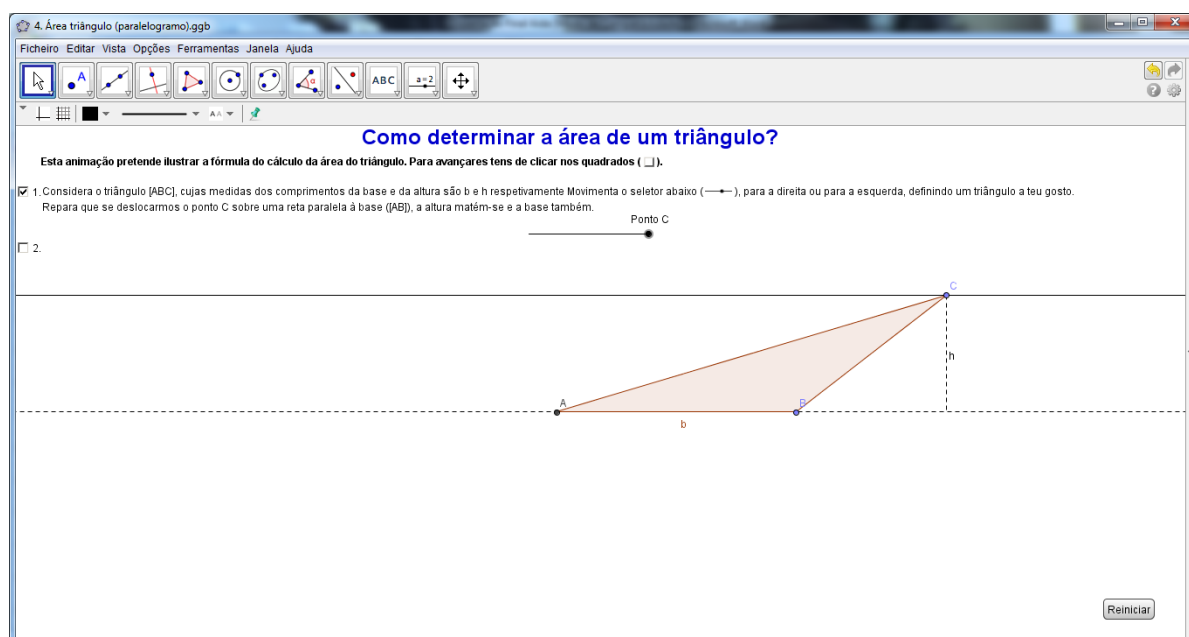



Figura 19 - Escolha do triângulo pela movimentação do seletor “Ponto C”

Depois surgem duas caixas booleanas que permitem mostrar que o passo seguinte é criar o ponto médio do lado [AC] (com base no ícone da barra de ferramentas), duplicou-se o triângulo e fez-se rodar o mesmo com centro de rotação no ponto médio do lado [AC] e amplitude  $180^\circ$ , para que esses lados coincidissem. Para fazer a rotação (de forma animada) definiu-se um seletor a variar entre 0 e 1, depois recorreu-se ao ícone da

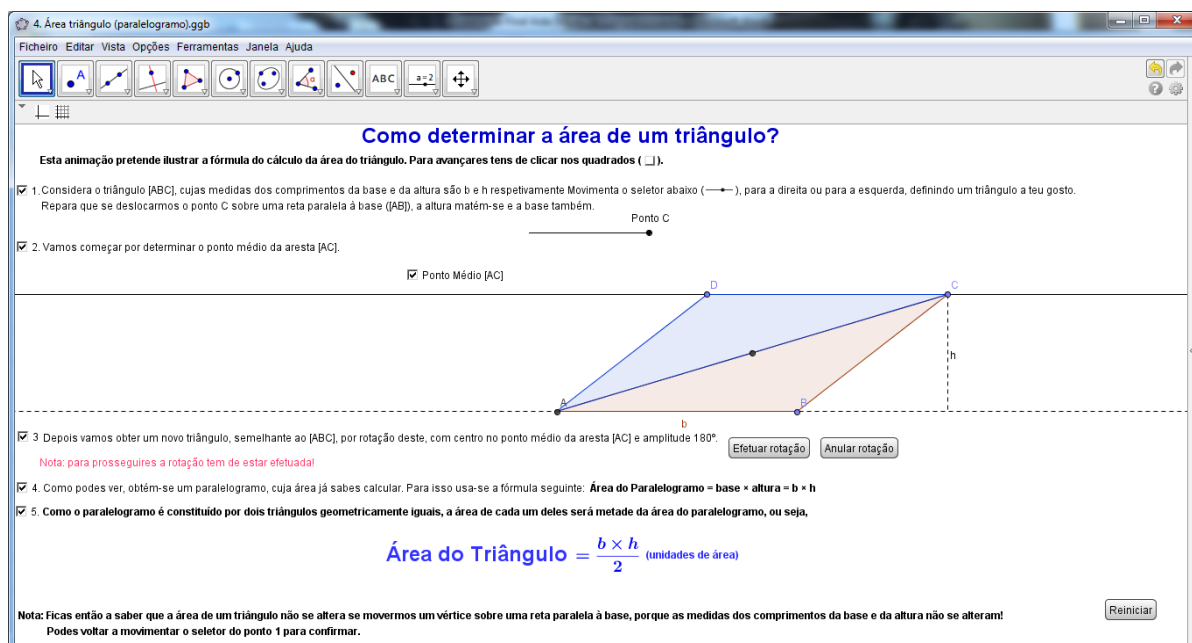
barra de ferramentas que permite definir uma rotação, , e fez-se variar o ângulo de rotação em função do seletor. Sendo o triângulo denominado polígono1, o ponto médio do lado [AC] denominado ponto E e o seletor denominado Área, a rotação definiu-se do seguinte modo: Rotação(Polígono1, E, Área 180°).

Definiu-se que apenas se pode prosseguir com a animação quando a rotação estiver efetuada, ou seja, nas propriedades de todos os objetos seguinte, nas **condições para mostrar**, teve de se definir além das outras condições, Área=1.

Para efetuar a rotação é necessário pressionar um botão criado para esse efeito e recorrendo à função (IniciarAnimação(Área, true). Criou-se outro botão para anular a rotação (DefinirValor(Área, 0)).

Ao analisar a imagem obtida percebe-se que se obteve um paralelogramo, o que nos remete necessariamente para a fórmula de cálculo da área do paralelogramo já analisada. Como o paralelogramo obtido é constituído por dois triângulos geometricamente iguais, a área de cada um deles é metade da do paralelogramo.

No final dá-se a possibilidade de movimentar o vértice C (recorrendo ao seletor definido para o efeito), ao longo de uma reta paralela à base, para salientar que movendo o vértice ao longo de uma reta paralela à base o valor da área não se altera pois as medidas dos comprimentos da base e da altura não se alteram (ver *Figura 20*).



**Figura 20 - Módulo interativo para ilustrar a fórmula de cálculo da área do triângulo por analogia com a fórmula de cálculo da área do paralelogramo.**

## 5.2. Um segundo olhar sobre a fórmula de cálculo da área de um triângulo

Na segunda construção também se começou por ilustrar que num triângulo  $[ABC]$ , cujos ângulos adjacentes à base são agudos, se o vértice oposto à base se mover sobre uma reta paralela à base, as medidas dos comprimentos da base e da altura não se alteram. Primeiro criou-se um seletor numérico  $d$ , a variar entre zero e sete, e desenhou-se o vértice  $C$  (oposto à base) sobre uma reta paralela à mesma (fazendo as suas coordenadas dependerem do seletor criado ( $d$ , 3.5)).

Definiram-se dois botões, um que permite deslocar o ponto  $C$  e outro que permite parar (ambos recorrendo à função `IniciarAnimação`).

Conforme se pode ver na *Figura 19*, desenhou-se a altura relativa a  $[AB]$ , cuja medida do comprimento é  $h$ , marcou-se o ponto médio desse segmento de reta ( $M$ ) e traçou-se uma reta paralela à base que passasse nesse ponto médio. Isso permitiu obter os pontos médios dos lados do triângulo  $[AC]$  e  $[BC]$  (designados por  $F$  e  $G$  respetivamente).

Decompôs-se o triângulo em dois novos triângulos e um trapézio e optou-se por distingui-los com cores diferentes para ser mais fácil acompanhar os pontos seguintes desta animação.

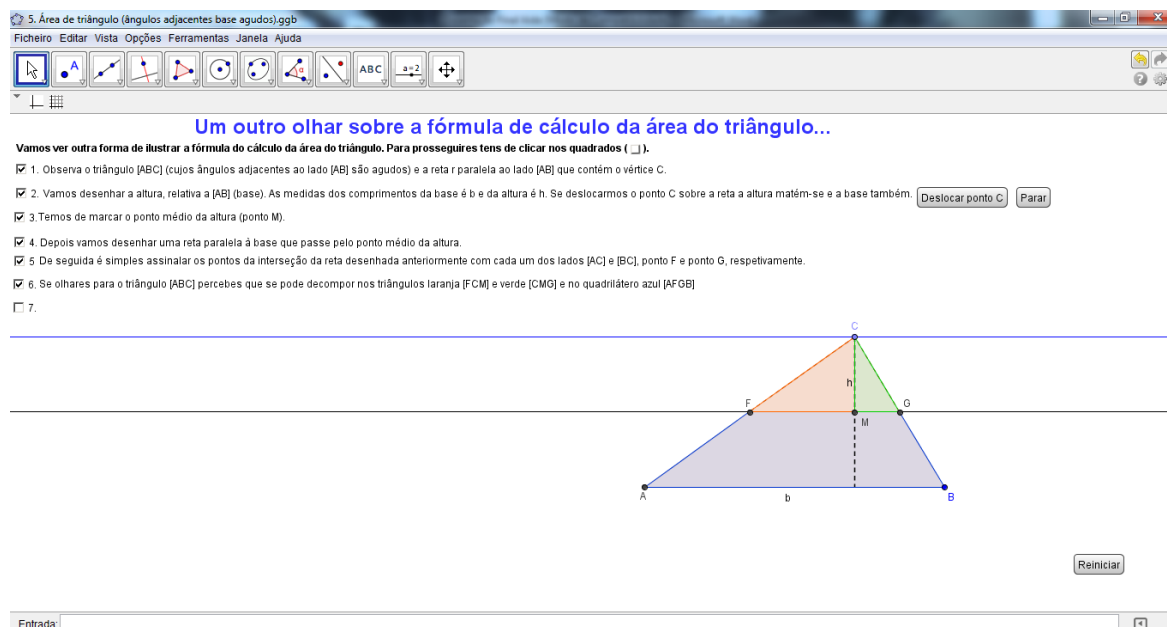
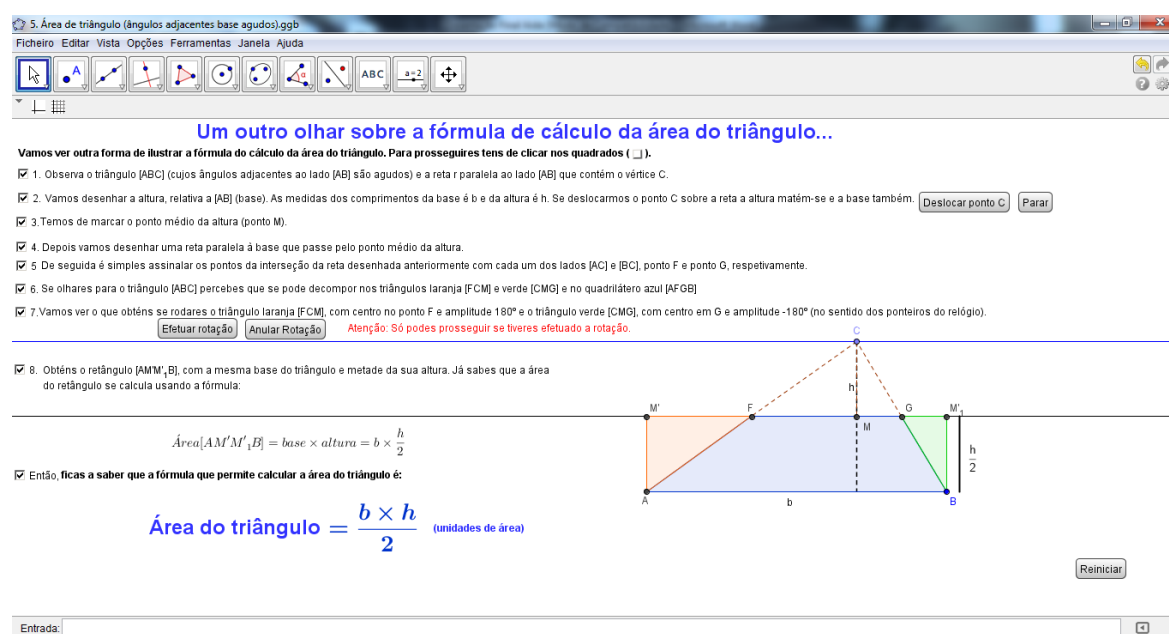


Figura 21 - Decomposição do triângulo  $[ABC]$  em dois triângulos retângulos e um quadrilátero

Efetuuou-se a rotação de cada um dos triângulos, com centro nos pontos médios dos lados do triângulo inicial e amplitude  $180^\circ$  (o laranja  $[FCM]$  no sentido positivo e o

verde [CMG] no sentido negativo), obtendo-se um retângulo equivalente ao triângulo em estudo, com a mesma medida de comprimento da base e metade da altura do triângulo (ver *Figura 20*). Estas rotações (animadas) são efetuadas em simultâneo porque foram definidas para que o ângulo de rotação dependesse de um mesmo seletor cujo valor varia entre zero e um. As rotações são efetuadas quando se clica no botão “Efetuar Rotação”(IniciarAnimação(i, true)) e são anuladas quando se pressiona o botão “Anular Rotação” (DefinirValor (i, 0)). Para se poder prosseguir com a animação a rotação tem de estar efetuada, pelo que a condição “i=1” teve de ser definida para todos os objetos que surgem depois deste ponto.

Como a fórmula do cálculo da área do retângulo já foi analisada, facilmente se explica que a fórmula que permite calcular a área do triângulo é metade do produto das medidas de comprimento da base e da altura.



**Figura 22 – Ilustração da fórmula de cálculo da área do triângulo por analogia com a fórmula de cálculo da área do retângulo.**

### 5.3. Uma terceira explicação sobre como calcular a área de um triângulo

O terceiro módulo construído para ilustrar o porquê da fórmula de cálculo da área do triângulo teve por base um triângulo cujos ângulos adjacentes à base sejam agudos [ABC], que não tenha nenhum lado na horizontal.

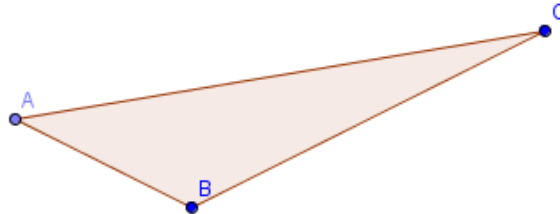


Figura 23 – Triângulo, que não tem nenhum lado na horizontal, cuja base é o lado maior e os ângulos adjacentes à mesma são agudos

Começou-se por definir um seletor (a variar entre zero e um) que permitisse efetuar a rotação do triângulo de modo a que o seu lado maior fosse a base e ficasse na horizontal. Este seletor é animado quando se clica no botão “Efetuar Rotação” (função “IniciarAnimação”), a rotação foi configurada para que o ângulo dependesse do seletor definido (comando: Rotação[A, (g 170.54)°, B])

Depois desenhou-se uma reta perpendicular à base que passasse no vértice oposto à mesma (ponto B), assinalando-se dessa forma o ponto de interseção dessa reta com a base do triângulo (ponto D).

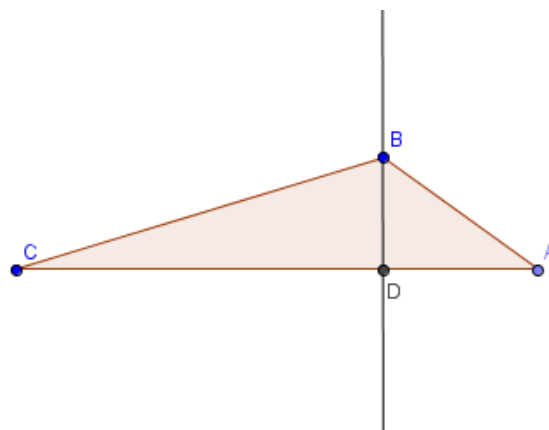
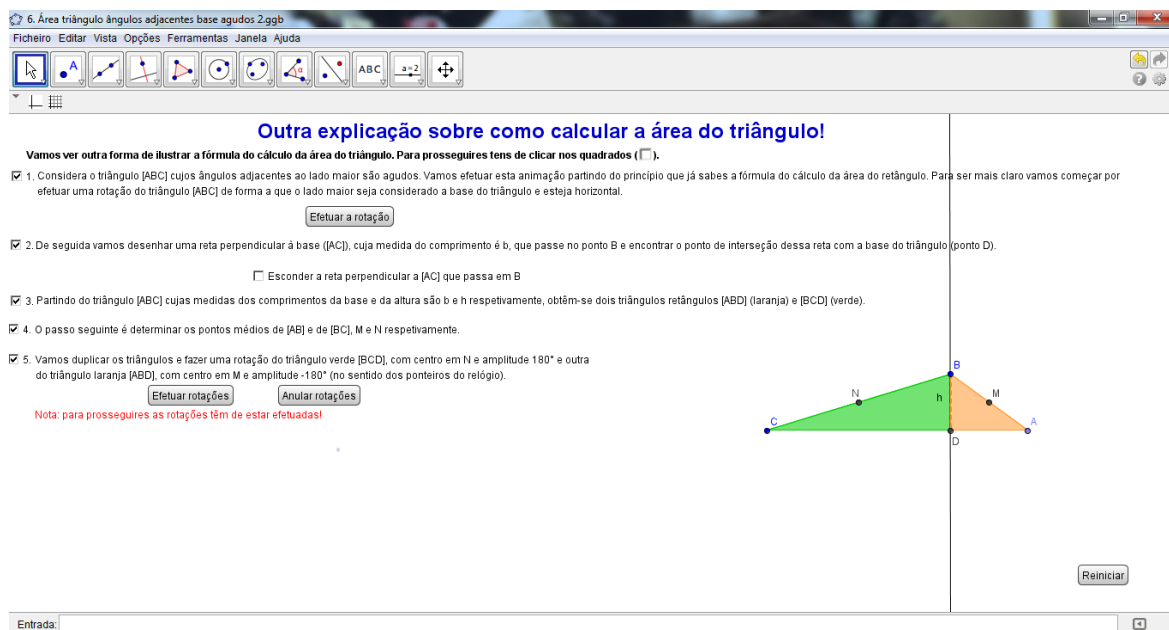


Figura 24 - Determinação do ponto de interseção da reta perpendicular à base que passa no ponto B, com a base, ponto D

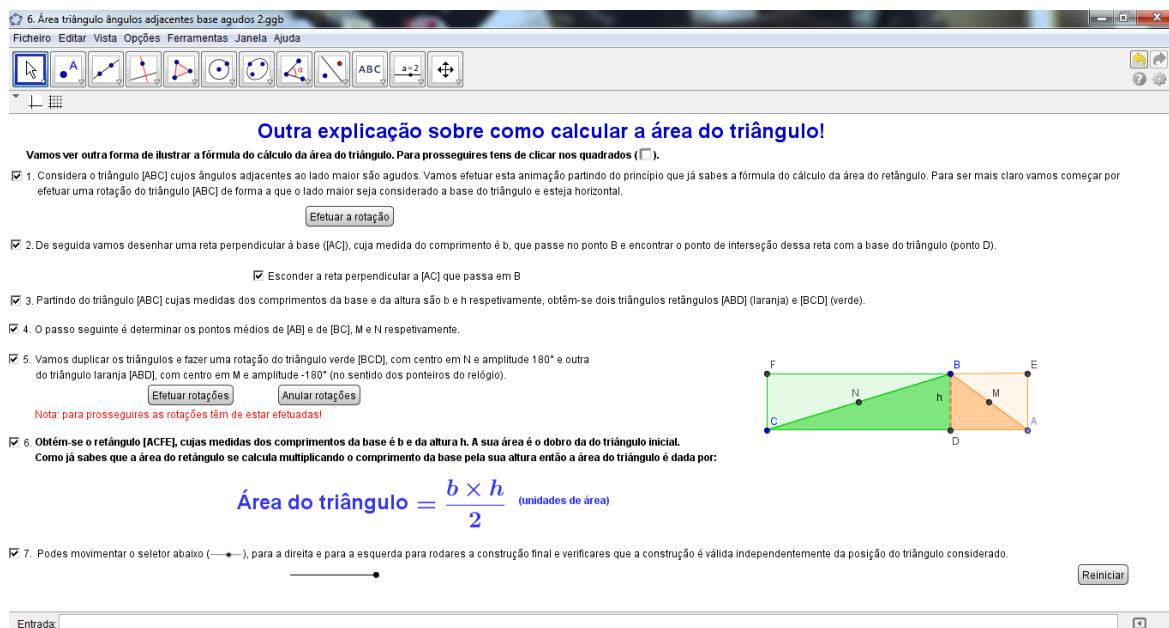
Decompôs-se o triângulo inicial em dois triângulos retângulos (o [BDC] assinalado a verde e o [ABD] assinalado a laranja) e determinou-se o ponto médio das suas hipotenusas (ver Figura 25).



**Figura 25- Decomposição do triângulo em dois triângulos retângulos**

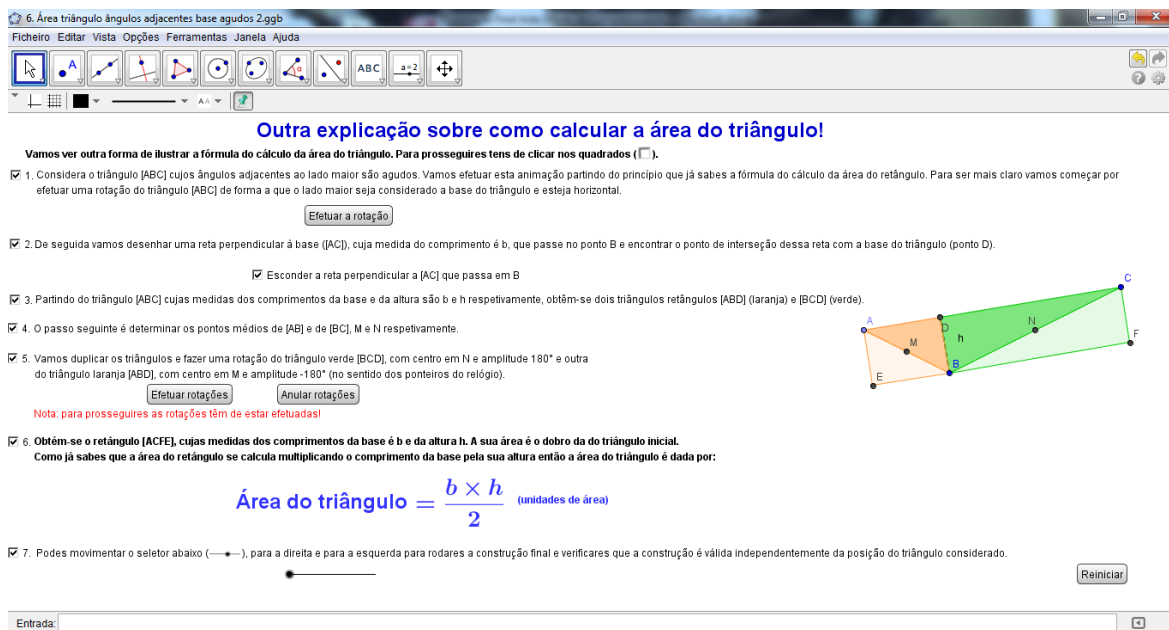
Posteriormente duplicaram-se os triângulos retângulos obtidos e, tendo por base um novo seletor, definiram-se as rotações simultâneas dos triângulos duplicados, com centro no ponto médio das suas hipotenusas e amplitude  $180^\circ$  (o verde no sentido positivo e o laranja no sentido negativo). Obteve-se um retângulo cujas medidas dos comprimentos da base e da altura são as mesmas do triângulo inicial e cuja área é o dobro da do triângulo inicial, chegando-se assim à fórmula de cálculo da área do triângulo.





**Figura 26 – Visão final do módulo interativo para ilustrar a fórmula de cálculo da área do triângulo, por analogia com a fórmula de cálculo da área do retângulo.**

No final definiu-se a possibilidade de movimentar a construção final para esclarecer que independentemente da posição do triângulo considerado, os passos seguidos ao longo desta animação são válidos.



**Figura 27 - Imagem final da ilustração da fórmula de cálculo da área do triângulo, tendo por base um triângulo cuja base é o lado maior, os ângulos adjacentes à mesma são agudos, quando o mesmo não tem a sua base na posição horizontal**

Nestas animações a maior dificuldade foi perceber o melhor procedimento a seguir para que as animações ficassem claras, houve necessidade de usar cores diferentes na decomposição dos triângulos para se perceberem mais facilmente as transformações efetuadas.

## Capítulo 6 - Fórmula de cálculo da área do trapézio

O trapézio propriamente dito deu origem a duas animações. A primeira “transforma” o trapézio num paralelogramo equivalente e depois num retângulo equivalente, a segunda parte do trapézio e decompõe-no de forma a obter um retângulo equivalente.

Aconselha-se, novamente, se possível, a explorar as animações antes de prosseguir a leitura.

### 6.1. Área do trapézio

Na primeira animação, partindo do trapézio propriamente dito [AECD], cujas medidas dos comprimentos das bases maior e menor são, respetivamente,  $B$  e  $b$ , desenhou-se uma reta perpendicular à base maior que passasse no ponto  $E$ , com isto encontrou-se a altura cuja medida do comprimento é  $h$  e assinalou-se o seu ponto médio ( $M$ ). Traçou-se uma reta paralela à base maior que passasse no ponto médio da altura. Este procedimento permitiu determinar os pontos médios de  $[AE]$  e  $[CD]$  ( $F$  e  $G$  respetivamente) para efetuar uma decomposição do trapézio em dois trapézios (ver *Figura 28*).

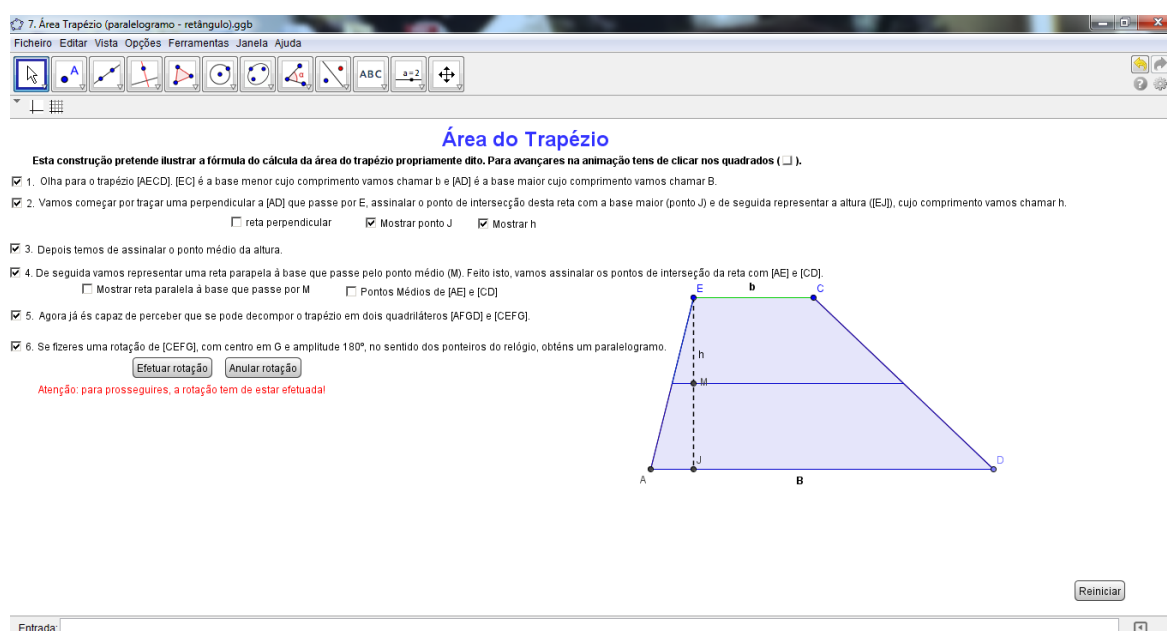


Figura 28 - Decomposição do trapézio em dois trapézios

Seguidamente, definiu-se um seletor numérico a variar entre zero e um, e efetuou-se uma rotação do trapézio superior [CEFG], com centro no ponto G e amplitude dependente do seletor, por isso a variar entre 0 e  $-180^\circ$ , transformando-se assim o trapézio num paralelogramo equivalente. O segmento de reta [EC], base menor do trapézio, foi assinalado a outra cor para clarificar que a medida do comprimento da base do paralelogramo obtido é a soma das medidas dos comprimentos das bases maior e menor do trapézio inicial. Só é possível prosseguir com a rotação efetuada, a partir deste ponto todos os objetos têm de ter nas suas configuração, no campo condições para mostrar, a condição  $i=1$ .

Para terminar e porque se pretendia ilustrar a fórmula de cálculo da área do trapézio a partir da do retângulo, traçou-se uma reta perpendicular à base do paralelogramo, que passasse no ponto F, obtendo-se assim o ponto I, que permitiu fazer uma nova decomposição num triângulo retângulo [AFI] e num quadrilátero [B'IFF'].

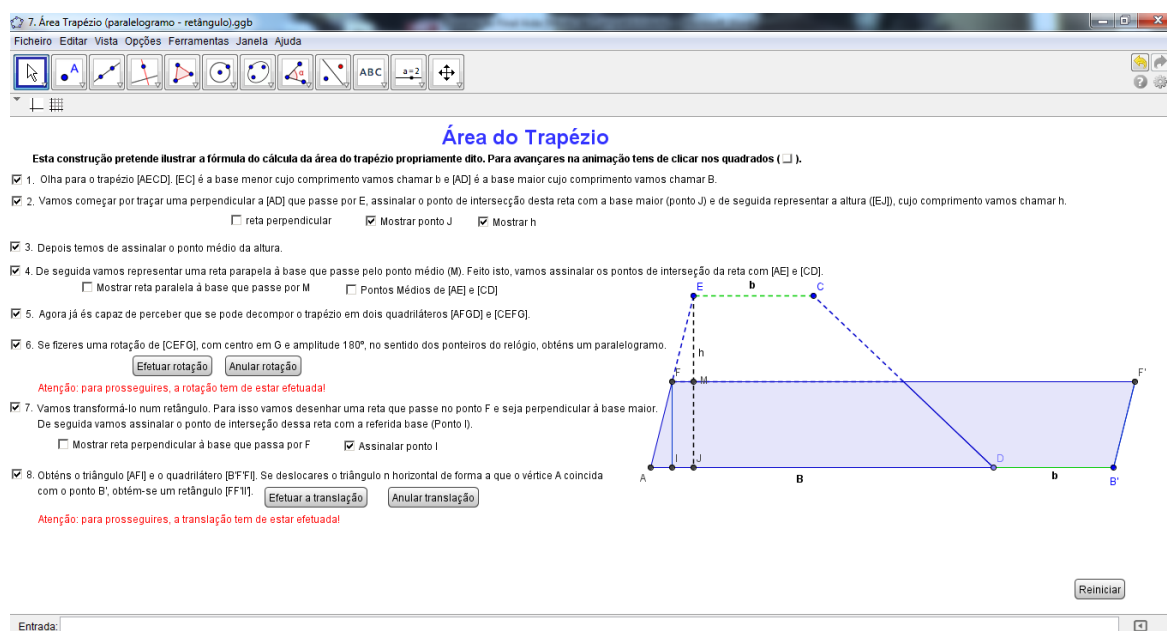
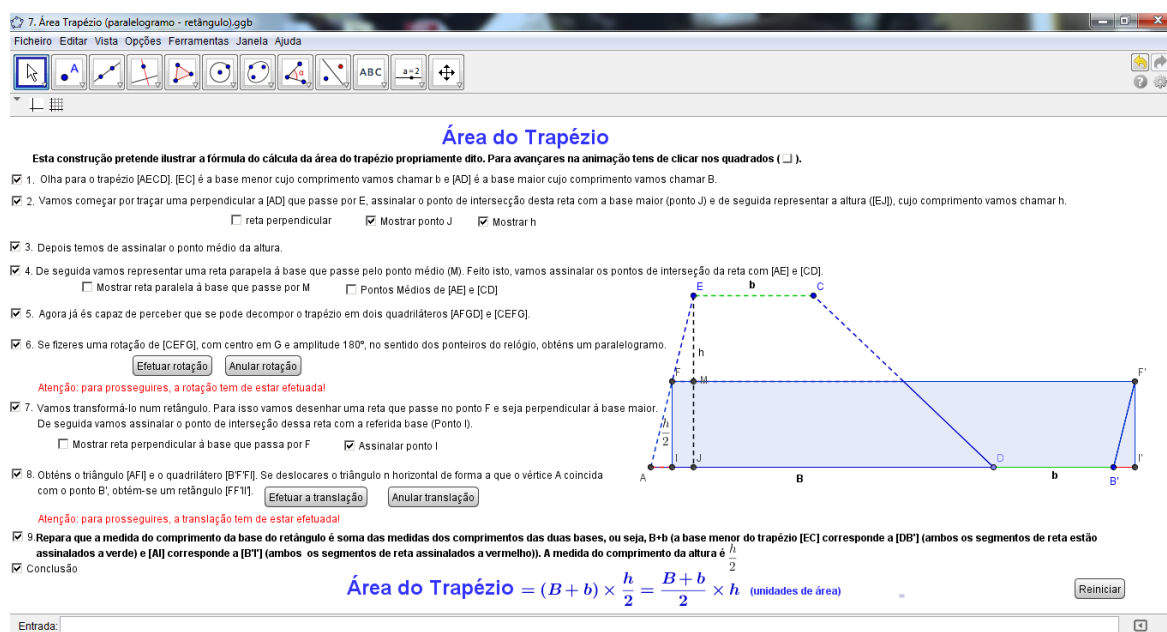


Figura 29 - Transformação do trapézio num paralelogramo

Definiu-se um seletor que varia entre zero e um e de seguida um vetor  $\vec{u}$  com direção horizontal, sentido da esquerda para a direita, cuja medida do comprimento varia em função do valor do seletor, entre zero e a medida do comprimento do segmento de reta [AB']. Efetuou-se a translação (animada) do triângulo [AFI], associada ao vetor  $\vec{u}$  que transformou o paralelogramo num retângulo equivalente (Figura 30). Só é possível

prosseguir a animação com a translação efetuada. O retângulo final tem metade da medida do comprimento da altura do trapézio e a medida do comprimento da sua base é a soma das medidas dos comprimentos das bases maior e menor do trapézio, obtendo-se assim a fórmula de cálculo da área do trapézio. A rotação e a translação foram definidas com recurso a botões cuja programação foi semelhante aos já mencionados.



**Figura 30 – Decomposição obtida para ilustrar a fórmula do cálculo da área do trapézio, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo, decompondo inicialmente em dois trapézios.**

## 6.2. O porquê da fórmula do cálculo da área do trapézio: outra visão.

Na segunda animação interativa, considerou-se o trapézio propriamente dito [AICD], cujas medidas dos comprimentos da base maior, da base menor e da altura são  $B$ ,  $b$  e  $h$  respetivamente. Conforme se pode ver na *Figura 31*, encontraram-se os pontos médios dos lados do trapézio ( $M_1$  de [AI] e  $M_2$  de [CD]) e desenharam-se duas retas perpendiculares às bases que contivessem esses pontos. Este procedimento permitiu encontrar dois pontos na base maior (G e H).

Tornou-se desse modo possível a decomposição do trapézio em dois triângulos retângulos ([AGM<sub>1</sub>] assinalado a vermelho e [DHM<sub>2</sub>] assinalado a verde) e um hexágono (assinalado a azul).

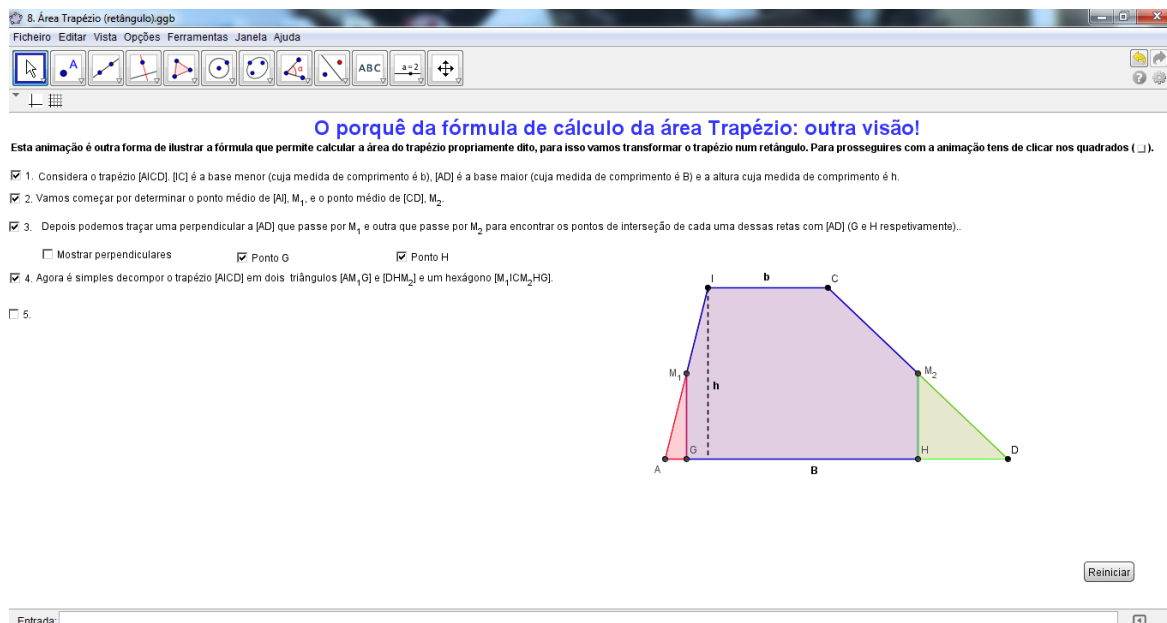


Figura 31 - Decomposição do trapézio em dois triângulos retângulos e um hexágono

Definiu-se um seletor (i), a variar entre zero e um, fez-se rodar simultaneamente os triângulos com centro no seu vértice que corresponde a cada um dos pontos médios encontrados, com uma amplitude a variar com o valor do seletor i, entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  (o verde no sentido positivo e vermelho no sentido negativo). Estas rotações (animadas) são iniciadas quando se pressiona o botão “Efetuar rotação” e anuladas sempre que se clica no botão “anular rotação”, o primeiro nas **configurações de programação, se clicar**, escreveu-se “IniciarAnimação(i, true)”, no segundo “1 IniciarAnimação(i, false) 2 DefinirValor(i, 0)”.

Para se prosseguir, a rotação tem de estar efetuada. Obteve-se mais uma vez um retângulo, cuja medida da base é metade da soma das medidas das bases do trapézio e a medida da altura é a mesma do trapézio (ver *Figura 32*).

Para ficar mais perceptível destacaram-se os segmentos de reta com cores diferentes, para que o utilizador perceba que a soma das medidas de comprimento dos lados maiores do retângulo é igual à soma das medidas de comprimento das bases maior e menor do trapézio inicial.

8. Área Trapézio (retângulo).ggb

Ficheiro Editar Vista Opções Ferramentas Janela Ajuda

O porquê da fórmula de cálculo da área Trapézio: outra visão!

Esta animação é outra forma de ilustrar a fórmula que permite calcular a área do trapézio propriamente dito, para isso vamos transformar o trapézio num retângulo. Para prosseguires com a animação tens de clicar nos quadrados ( ).

1. Considera o trapézio [AICD]. [IC] é a base menor (cuja medida de comprimento é  $b$ ), [AD] é a base maior (cuja medida de comprimento é  $B$ ) e a altura cuja medida de comprimento é  $h$ .
2. Vamos começar por determinar o ponto médio de [AI],  $M_1$ , e o ponto médio de [CD],  $M_2$ .
3. Depois podemos traçar uma perpendicular a [AD] que passe por  $M_1$  e outra que passe por  $M_2$  para encontrar os pontos de interseção de cada uma dessas retas com [AD] (G e H respetivamente)..
4. Agora é simples decompor o trapézio [AICD] em dois triângulos [AM<sub>1</sub>G] e [DHM<sub>2</sub>] e um hexágono [M<sub>1</sub>ICM<sub>2</sub>HG].
5. Podes rodar o triângulo [AM<sub>1</sub>G], com centro em  $M_1$  e amplitude  $-180^\circ$  ( $180^\circ$  no sentido dos ponteiros do relógio) e rodar o triângulo [DHM<sub>2</sub>] com centro  $M_2$  e amplitude  $180^\circ$ .
6. Obtemos um retângulo ([GG'HH']), cuja fórmula de cálculo da área é:  

$$\text{Área}_{\text{retângulo}} = \text{base} \times \text{altura}$$
7. Repara que a soma das medidas dos comprimentos dos lados maiores do retângulo que obtiveste é  $(B+b)$  ([AG] é geometricamente igual a [G'] (ambos os segmentos de reta assinalados a vermelho) e [HD] é geometricamente igual a [CH'] (ambos os segmentos de reta estão assinalados a verde)), então a medida da base do retângulo é dada por  $\frac{B+b}{2}$  (metade da soma das medidas dos comprimentos das bases do trapézio), a medida do comprimento da altura é  $h$ .

Conclusão:

$$\text{Área do Trapézio} = \frac{(B+b)}{2} \times h \quad (\text{unidades de área})$$

Reiniciar

Entrada:

Figura 32 – Animação que ilustra a fórmula do cálculo da área do trapézio, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo, decompondo inicialmente em dois triângulos retângulos e num hexágono.

Nestas animações a maior dificuldade foi perceber como estruturá-las para que ficassem claras. Para auxiliar a perceção dos procedimentos seguidos durante as animações usaram-se cores diferentes.





## Capítulo 7 - Fórmula de cálculo da área do papagaio

A fórmula de cálculo da área do papagaio também foi objeto de estudo e procurou-se ilustrar a mesma por analogia com a do retângulo.

Aconselha-se, novamente, se possível, a explorar as animações antes de prosseguir a leitura.

Começou-se por representar o papagaio  $[ABD_1C]$ , identificar as diagonais maior e menor, cujas medidas dos comprimentos são respetivamente  $D$  e  $d$ , bem como o ponto de interseção das duas (ponto  $E$ ).

Depois decompôs-se o papagaio em quatro triângulos retângulos (geometricamente iguais dois a dois e por isso identificados com a mesma cor (tonalidades diferentes), conforme se pode ver na *Figura 33*).

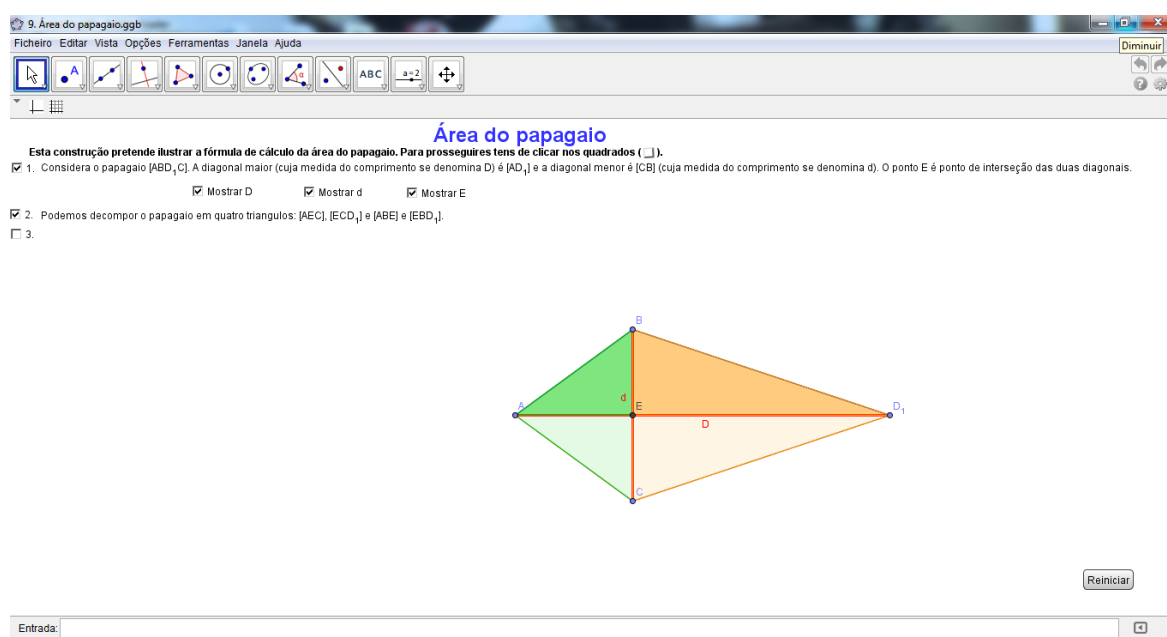


Figura 33 - Decomposição do papagaio em quatro triângulos retângulos

Desenharam-se duas retas perpendiculares à diagonal maior, que passassem pelos seus extremos (ponto  $A$  e ponto  $D_1$ ), reta  $r$  e  $s$ , respetivamente (ver *Figura 34*).

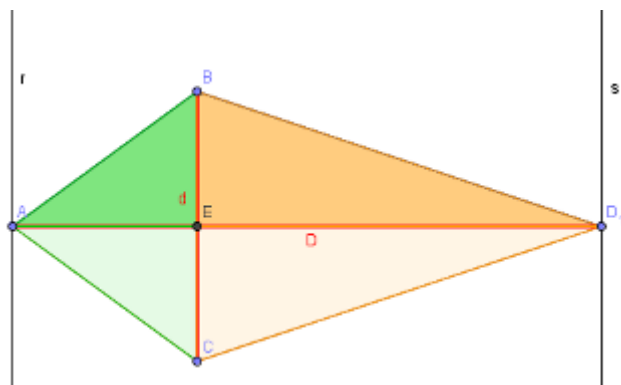


Figura 34 - Retas perpendiculares a  $[AD_1]$  nos pontos A e  $D_1$ , r e s respetivamente

Fez-se uma reflexão do triângulo  $[ACE]$  (assinalado a verde claro) relativamente à reta r e do triângulo  $[CD_1E]$  (assinalado a laranja claro) relativamente à reta s. Atendendo a que a reflexão é feita instantaneamente no *GeoGebra*, não era muito claro que o triângulo obtido era geometricamente igual ao inicial. Para facilitar a compreensão pensou-se que seria mais perceptível se à medida que o triângulo inicial “desaparece”, o triângulo resultante da reflexão fosse “aparecendo”.

Para começar criou-se o seletor numérico q, a variar entre zero e um. Seguidamente era necessário definir um novo ponto que se fosse aproximando do ponto A, à medida que o valor de q aumentasse. Para isso definiu-se o ponto  $I = E + qA$  (este foi o comando inserido no *GeoGebra*, no entanto, o ponto A é assumido como sendo o vetor  $\overrightarrow{OA}$ ). Representou-se uma reta que passasse por I e fosse paralela a  $[EC]$ , obtendo-se assim o ponto K. Uniram-se os pontos A, I e K e obteve-se um triângulo retângulo  $[AIK]$  coincidente com o triângulo  $[AEC]$ , quando  $q=0$  (ver *Figura* abaixo).

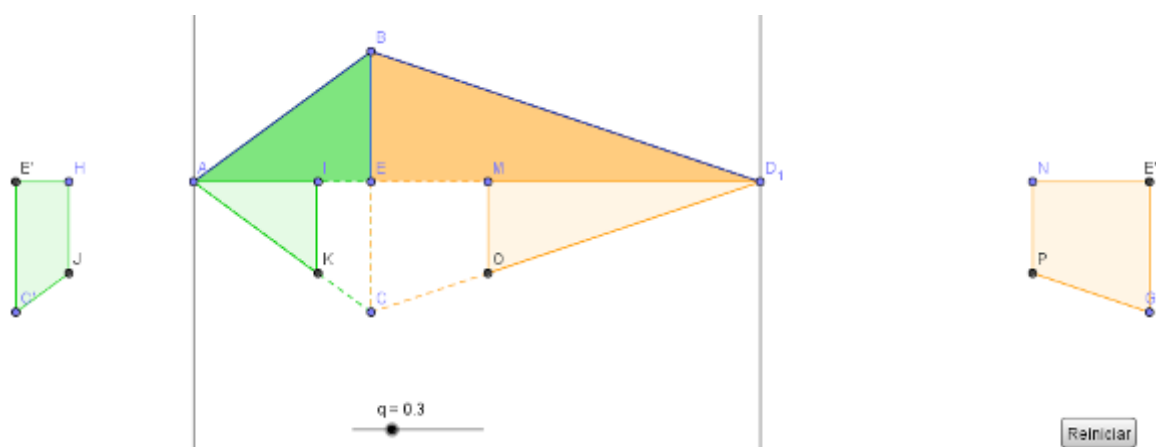
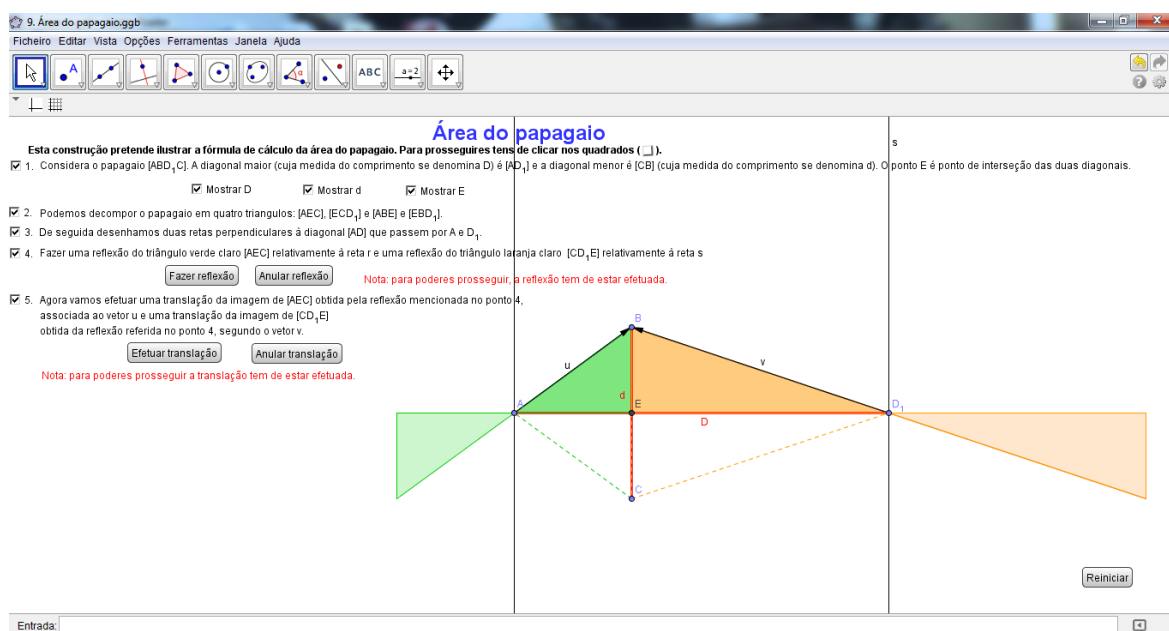


Figura 35 - Criação do efeito de "reflexão" faseada

Do mesmo modo, considerando o triângulo obtido por reflexão do triângulo [AEC], ou seja, o triângulo [AE'C'] era necessário definir um ponto que se fosse aproximando de A à medida que q aumentava. Definiu-se o ponto  $H = E' - qA$  (este foi o comando inserido no *GeoGebra*, no entanto, o ponto A é assumido como sendo o vetor  $\overrightarrow{OA}$ ). Representou-se uma reta paralela a [E'C'], que passasse por H, obteve-se o ponto J. Unindo os pontos A, H e J, obtendo-se o triângulo [AHJ], não visível na animação, coincidente com o triângulo [AC'E'] obtido por reflexão, para  $q=1$ . Neste caso definiu-se ainda o trapézio [C'E'HJ], definido com a mesma tonalidade que o triângulo [MOD<sub>1</sub>]. Ao movimentar o seletor numérico q, visualiza-se que à medida que o triângulo [AEC] “diminui”, o quadrilátero vai aumentando a sua área, até que os pontos H e J se tornam coincidentes e se obtém um triângulo coincidente com a imagem do obtido por reflexão de [AEC], relativamente à reta r.

Em relação ao triângulo [CD<sub>1</sub>E] o procedimento foi semelhante, usando o mesmo seletor numérico, para que quando a animação do seletor fosse iniciada, ocorressem as duas “reflexões” em simultâneo. Criaram-se dois botões, “Fazer reflexão” e “Anular a reflexão”. O primeiro inicia a animação do seletor q e procede à “reflexão” dos triângulos conforme mencionado acima, configurado recorrendo ao comando `IniciarAnimação(q, true)`. O segundo permite parar a animação e anular a “reflexão” e foi configurado com os comandos `IniciarAnimação(g, false)` e `DefinirValor(g, 0)`. Só é possível prosseguir com a animação quando a reflexão está efetuada.

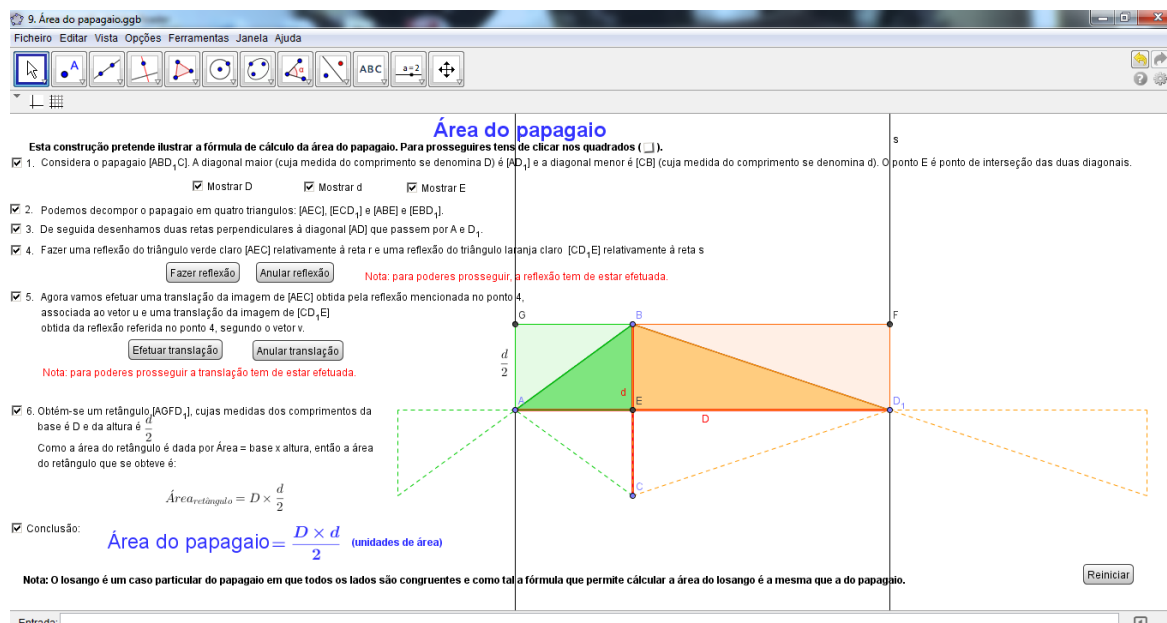


**Figura 36 - Decomposição do papagaio após reflexão dos triângulos [AEC] relativamente à reta r e [CD<sub>1</sub>E] relativamente à reta s**

Em seguida, criou-se um novo seletor numérico (g), a variar entre zero e um, definiram-se dois vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{D_1B}$  e fez-se a translação do triângulo verde claro ([AC'E']), tendo em conta o vetor  $g \cdot \vec{u}$  e a translação do triângulo laranja claro ([C'D<sub>1</sub>E']) tendo em conta o vetor  $g \cdot \vec{v}$ , para obter mais uma vez um retângulo equivalente ao papagaio inicial.

Estas translações (animadas) são efetuadas clicando no botão “Efetuar translação” que foi configurado com o comando “IniciarAnimação(g, true)” e pode ser anulada clicando o botão “Anular translação”, que foi configurado com os comandos IniciarAnimação(g, false) e DefinirValor(g, 0). Só é possível prosseguir depois de se ter efetuado a translação.

O retângulo final possui uma medida de comprimento igual à medida de comprimento da diagonal maior (D) e a sua altura é metade da medida de comprimento da diagonal menor (d) (ver *Figura 37*). Pelo que por analogia com a fórmula de cálculo da área do retângulo facilmente se chega à fórmula de cálculo da área do papagaio.



**Figura 37 – Ilustração da fórmula de cálculo da área do papagaio, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo.**

A maior dificuldade sentida na elaboração desta animação foi efetuar a “reflexão” para que à medida que os triângulos originais vão “diminuindo o seu tamanho”, os triângulos refletidos vão “aumentando”. Dando como exemplo os triângulos [AEC] e [AE’C’], a solução foi criar dois pontos sobre o lado [AE] e [AE’], que dependessem do valor de um mesmo seletor numérico, e que à medida que o valor do seletor aumentasse, os pontos se aproximassem de A. Feito isto tinham-se encontrado dois vértices de cada um dos “novos” triângulos, para encontrar o terceiro, bastou criar uma reta que passasse por cada um dos pontos encontrados e fosse paralela aos lados que se encontravam na vertical, em cada um dos triângulos.

Note-se que o papagaio é um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais. O losango é um caso particular do papagaio em que todos os lados são geometricamente iguais e portanto a fórmula para calcular a área de um losango é a mesma que a do papagaio.



## Capítulo 8 - Fórmula de cálculo da área do círculo

Por fim efetuou-se uma animação para ilustrar a fórmula do cálculo da área do círculo, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo.

Aconselha-se novamente, se possível, a explorar a animação antes de prosseguir a leitura.

Para começar representou-se um círculo com centro C e medida de comprimento de raio r. O círculo foi decomposto conforme sugerido por Breda et al., (2011). pág. 128 e 129, em setores circulares que originaram triângulos com vértices no centro da circunferência e nos pontos extremos dos arcos de circunferência que definem os setores. Este conjunto de triângulos forma uma aproximação ao círculo que será tão mais próxima quanto maior for o número de setores circulares considerados.

Esta animação pretende “cortar” o círculo em “fatias” que se vão abrindo em fila, e que depois se dispõem para que encaixem umas nas outras, obtendo-se um paralelogramo equivalente, que será transformado num retângulo também ele equivalente à figura inicial.

Para fazer a decomposição começou-se por considerar a divisão do círculo em 36 setores circulares, ou seja,  $10^\circ$  para a amplitude de cada um dos arcos obtidos.

Ao clicar na caixa booleana 1., surge na folha gráfica um círculo (desenhado recorrendo ao ícone da barra de ferramentas). Criaram-se duas caixas booleanas através das quais se dá a possibilidade de assinalar/ocultar o centro e o raio.

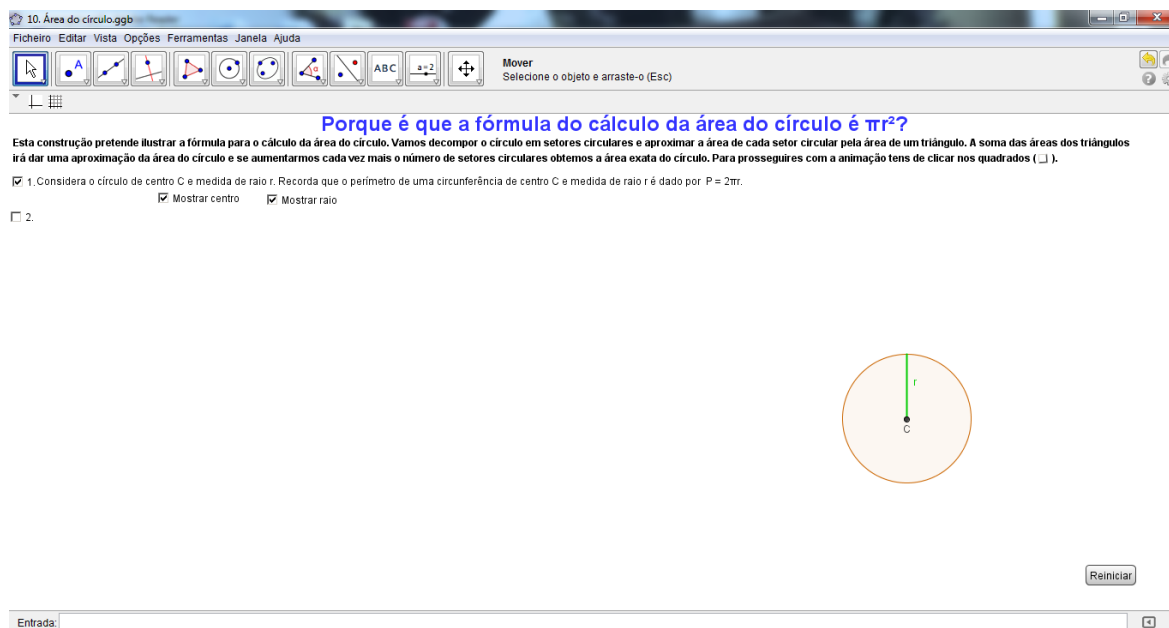



Figura 38 - Exemplo da animação da ilustração do porquê da fórmula do cálculo da área do círculo, quando se clica no ponto 1.

Ao clicar na caixa booleana legendada com 2., surge a explicação do procedimento de decomposição do círculo em triângulos. Para efetuar esta decomposição considerou-se um seletor numérico  $i_1$ , a variar entre 0 e 0,75. Fez-se uma rotação do ponto B com centro no ponto C e amplitude  $10^\circ$ , obtendo-se o ponto B', desenhou-se então o primeiro triângulo [BB'C], clicando no ícone  da barra de ferramentas e depois nos pontos B, B' e C, definiu-se que o mesmo só poderia aparecer quando  $i_1 > 0$ .

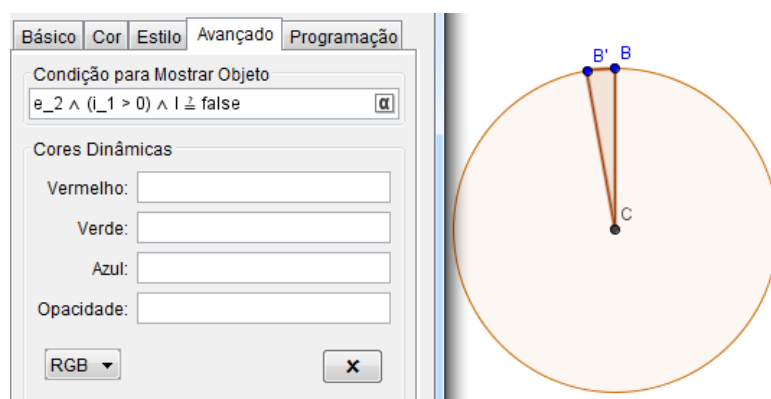
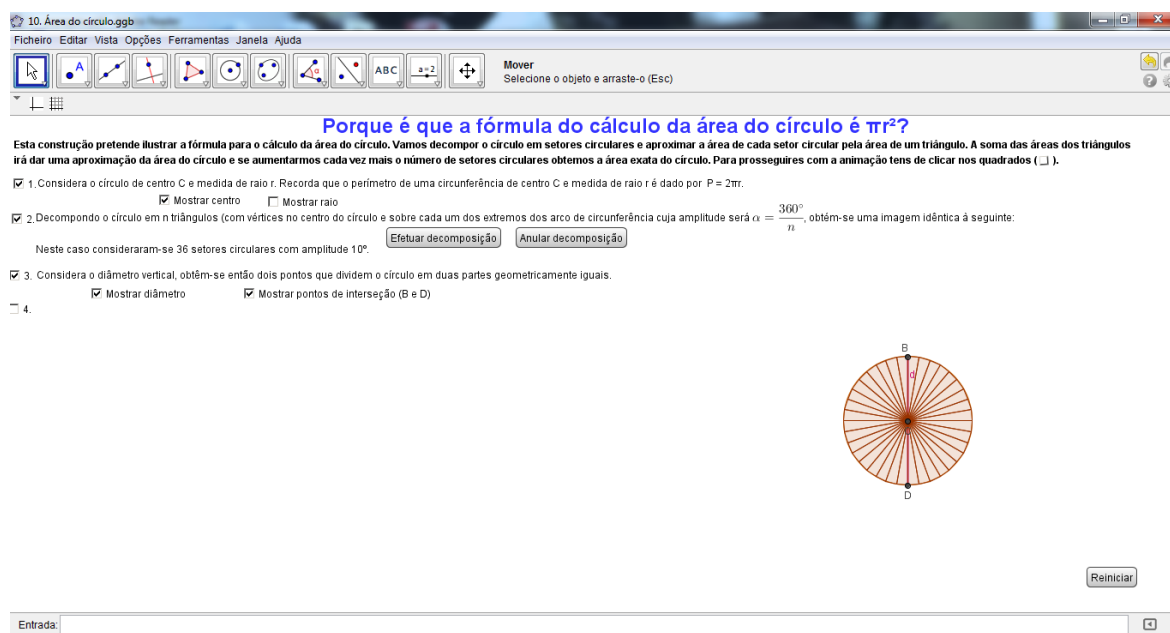


Figura 39 - Início da decomposição do círculo em triângulos

Os restantes triângulos foram criados por rotação do anterior, com centro em C e amplitude  $10^\circ$ , e configurados para surgirem com uma diferença uns dos outros de 0,02 relativamente ao valor de  $i_1$ .



Criaram-se dois botões, um que permite “Efetuar a decomposição” e outro que permite “Anular a decomposição”. O primeiro botão foi configurado, clicando sobre ele com o botão do lado direito do rato, selecionou-se o menu **programação**, depois o menu **se clicar** e inseriu-se o comando `IniciarAnimação(i1, true)` (inicia a animação do seletor i<sub>1</sub>). O segundo botão foi configurado de modo idêntico, mas usando os comandos `IniciarAnimação(i1, false)` e `DefinirValor(i1, 0)` (além de parar a animação do seletor i<sub>1</sub>, define o seu valor como zero, ou seja, o seu valor inicial) (ver *Figura 40*).



**Figura 40 - Decomposição do círculo em triângulos.**

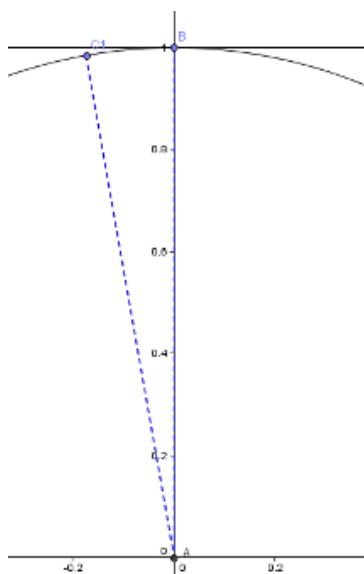
Definiu-se que esta construção ficaria oculta quando o valor lógico da caixa booleana legendada com 4. fosse true, ou seja, quando o utilizador clicar na caixa booleana com o número 4. oculta a construção que se fez até este momento.

O passo seguinte consiste em fazer a “abertura do círculo”. Para tal, criou-se um seletor numérico a, a variar entre zero e um e um seletor dependente b, que toma o valor de a, se  $a < 1$ , caso contrário toma o valor 1<sup>2</sup>. Definiu-se ainda o seletor  $\alpha = 10^\circ$ . Todos os objetos que surgem de seguida têm de ter nas **configurações, condição para mostrar objeto**, a conjunção de condições que define o valor lógico das variáveis booleanas correspondentes às caixas 1., 2., 3. e 4. como true (ou seja,  $e_2 \wedge h \wedge k \wedge l$ ) para que eles só fiquem visíveis a partir deste momento da animação.

De seguida criou-se um novo círculo coincidente com o primeiro, representaram-se os pontos A e B, sendo A coincidente com o centro C e B o ponto de maior ordenada

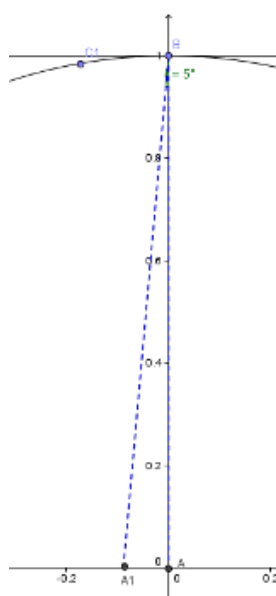
<sup>2</sup> Devido às reestruturações que este applet sofreu, o seletor b, toma sempre o valor do seletor a pelo que neste momento já não seria necessário.

da circunferência (ver *Figura 41*). Inicialmente começou-se por fazer uma rotação do ponto B, com centro no centro do círculo e amplitude  $10^\circ$  no sentido positivo, obtendo-se assim o ponto  $C_1$ .



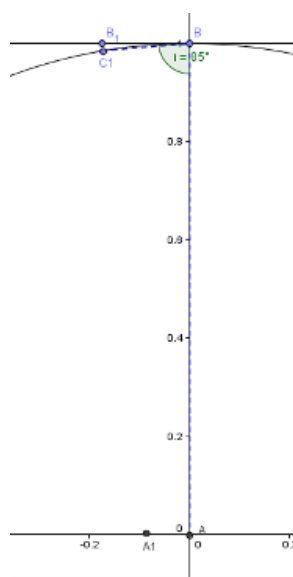
**Figura 41 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto  $C_1$ )**

Depois procedeu-se à marcação do ponto  $A_1$  que corresponde ao vértice do primeiro triângulo quando se faz a abertura do círculo. Para isso fez-se uma rotação do ponto A, com centro em B e amplitude  $(b5)^\circ$  negativos  $(-b\alpha/2)$  (quando  $a=0$ ,  $b=0$  e o ponto  $A_1$  coincide com o ponto A).



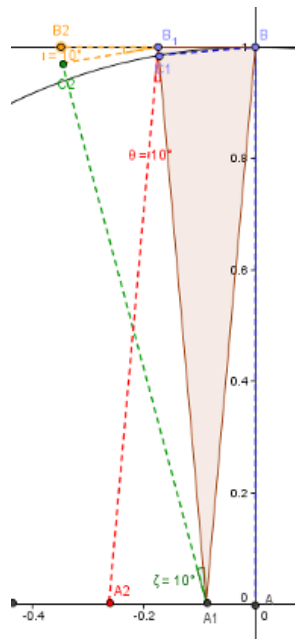
**Figura 42 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto  $A_1$ )**

Ao observar a *Figura 43*, vê-se que o ponto  $C_1$  está sobre o círculo, e não sobre o segmento de reta que corresponde à aproximação do perímetro da circunferência e é perpendicular ao segmento de reta  $[AB]$  (raio). Vê-se ainda que a amplitude do ângulo  $\angle ABC_1$  é  $85^\circ$ , então para se obterem os lados menores dos triângulos sobre o referido segmento de reta foi necessário marcar um novo ponto,  $B_1$ , que se obteve por rotação do ponto  $C_1$  com centro em  $B$  e amplitude  $(b \times 5)^\circ$  negativos  $(-b\alpha/2)$ . Note-se que quando  $a=0$ ,  $b=0$  e portanto o ponto  $B_1$  coincide com o ponto  $C_1$  que está sobre a circunferência, quando  $a=1$  (logo  $b=1$ ), o ponto  $B_1$  está sobre o segmento de reta perpendicular ao raio.

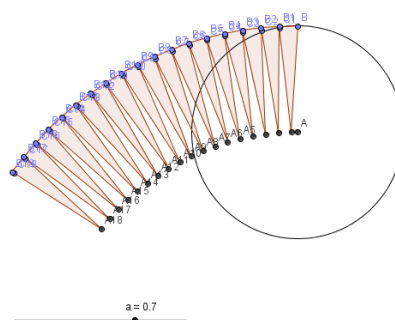



**Figura 43 - Decomposição do círculo em triângulos (Marcação do ponto  $B_1$ )**

Conforme se pode ver na *Figura 44*, o ponto  $C_2$  (assinalado a verde) obteve-se fazendo uma rotação do ponto  $B_1$  com centro em  $A_1$  e amplitude  $\alpha$  (ou seja,  $10^\circ$ ), o ponto  $A_2$  (assinalado a vermelho) foi obtido fazendo uma rotação do ponto  $A_1$ , com centro em  $B_1$  e amplitude  $(-b\alpha)^\circ$  e o ponto  $B_2$  (assinalado a cor de laranja) foi obtido fazendo uma rotação do ponto  $C_2$ , com centro em  $B_1$  e amplitude  $(-b\alpha)^\circ$  (ou seja,  $(-b \times 10)^\circ$ ).



Depois de analisar a decomposição pretendida, viu-se que era necessário criar três tipos de pontos, os pontos  $A_n$  que vão corresponder aos vértices que inicialmente estão unidos e coincidem com o centro da circunferência; os pontos  $C_n$ , que são pontos auxiliares, que permitem criar os pontos  $B_n$ , que corresponderão aos vértices dos triângulos que depois de alinhados se situam num segmento de reta cuja medida do comprimento corresponde a uma aproximação do perímetro do círculo.



Para criar os dezoito triângulos em falta, correspondentes ao outro semicírculo, recorreu-se a uma reflexão dos que já se tinham elaborado relativamente ao eixo das ordenadas (selecionaram-se todos os triângulos, clicou-se no ícone  e de seguida sobre o eixo das ordenadas) (Figura 46).

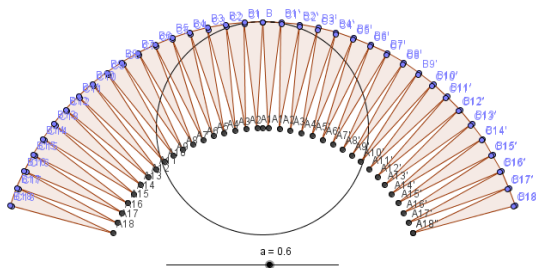


Figura 46 - Ilustração da decomposição do círculo em triângulos

Note-se que ao efetuar a abertura, surgem dois segmentos com seta com a indicação que as medidas dos comprimentos do segmento de reta correspondente à aproximação do perímetro da circunferência é  $2\pi r$  e a altura  $r$  (ver Figura 51). Conforme se pode ver na figura 47, estes vetores foram configurados recorrendo à criação de um seletor legenda<sup>3</sup> que, se  $a < 1$ , toma o valor de  $a$ , se não toma o valor 1. Para definir os segmentos com seta que surgem na horizontal, definiram-se os pontos E e E', determinou-se o ponto médio entre eles, ponto C, e criaram-se os pontos D com o comando  $C + \text{legenda} (E' - C)$  e F com o comando  $C + \text{legenda} (E - C)$ . De seguida definiram-se os vetores  $\overrightarrow{CF}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , cuja medida de comprimento aumenta com o aumento do seletor numérico legenda. As caixas de texto associadas a estes vetores surgem quando  $a=1$ . Para os vetores referentes à altura cuja medida de comprimento é  $r$ , o procedimento foi análogo.

<sup>3</sup> Devido às reestruturações que este applet sofreu, o seletor legenda, toma sempre o valor do seletor a pelo que neste momento já não seria necessário.

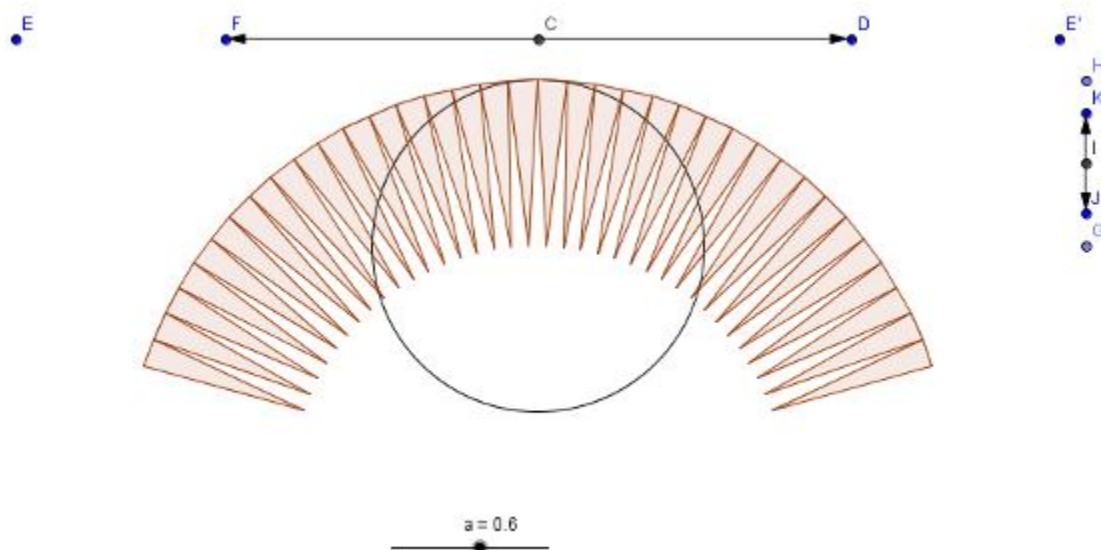


Figura 47 - Configuração dos vetores indicativos das medidas dos comprimentos

No passo seguinte pretendeu-se dividir em duas partes a fila de triângulos e fazer rodar a parte da direita de modo a encaixar na da esquerda., Definiu-se um seletor numérico  $c$ , a variar entre zero e um, fez-se um corte vertical no ponto B e determinou-se o ponto médio de  $[A'_1B]$ .

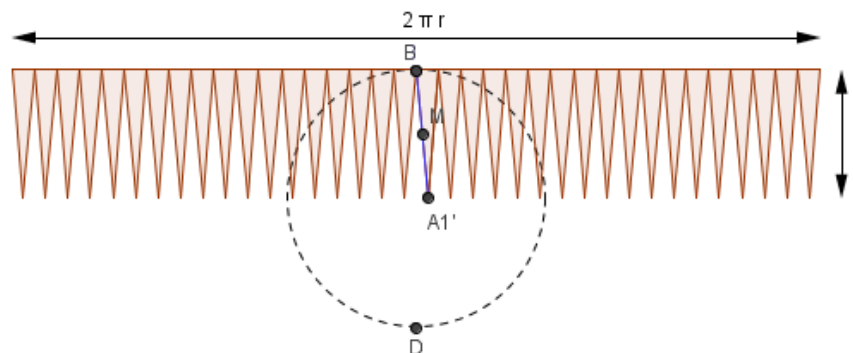
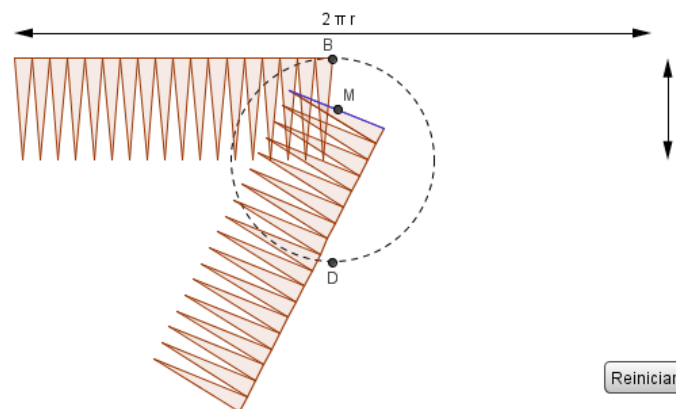


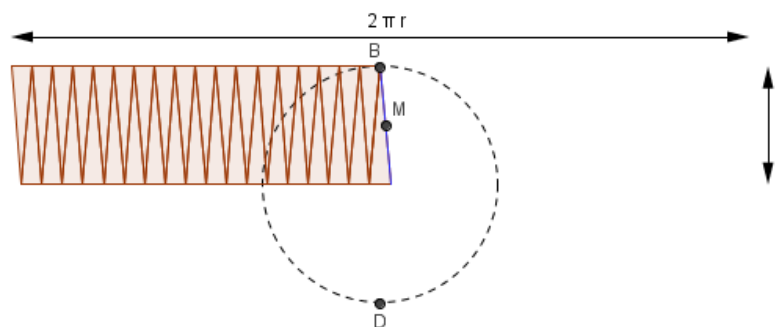
Figura 48 – Marcação do ponto médio de  $[A'_1B]$ .

Fizeram-se rodar todos os triângulos que resultaram da reflexão, com centro no ponto médio de  $[AB'_1]$  e amplitude  $(-c \ 180)^\circ$ .



**Figura 49 - Ilustração da decomposição do círculo em triângulos – transformação num paralelogramo (com parte da rotação efetuada)**

O objetivo desta rotação foi os triângulos alvo de rotação “encaixarem” na outra metade, obtendo-se assim um paralelogramo (ver Figura 50). Para a ilustração ficar mais clara, ocultaram-se todos os pontos, e definiu-se que os triângulos resultantes da reflexão apenas apareceriam quando  $c=0$  e os resultantes da rotação quando  $c>0$ .

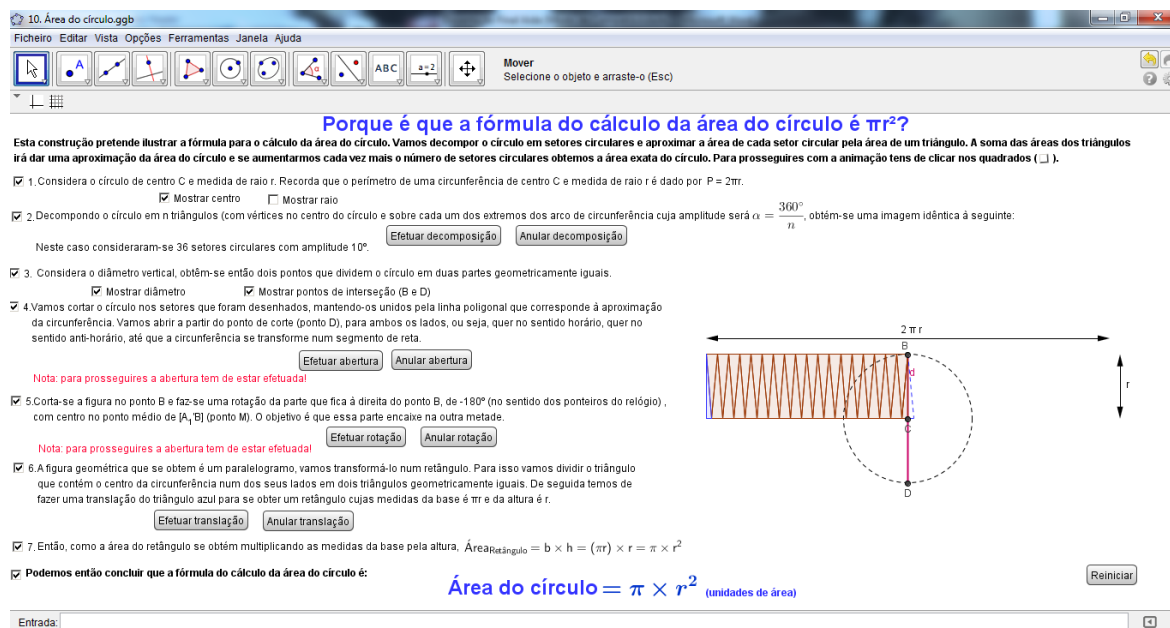


**Figura 50 - Ilustração da decomposição do círculo em triângulos – transformação num paralelogramo**

Uma vez efetuados estes passos surge a caixa booleana 5. que permite avançar para o passo seguinte (ver *Figura 51*)







**Figura 52 - Visão global do módulo interativo para ilustrar a fórmula de cálculo da área do círculo, por analogia com a fórmula do cálculo da área do retângulo.**

Esta animação foi um grande desafio dada a sua complexidade, conforme fui explicando acima, foram várias as dificuldades que encontrei ao longo da sua elaboração, mas com persistência foram sendo superadas.

Este foi um dos primeiros módulos interativos construídos no âmbito deste trabalho. Inicialmente esta animação foi pensada para que todos os objetos fossem definidos em função de um mesmo seletor a, ou seja, todos os elementos iam surgindo/desaparecendo à medida que o utilizador movimentasse o seletor para a direita/esquerda. No entanto percebeu-se que esse método não era muito eficaz porque a necessidade de movimentar o seletor era fator de distração. Então optou-se por reestruturar a animação de modo a que o utilizador apenas tenha de clicar em botões para prosseguir.

Esta reestruturação fez com que alguns dos seletores criados e utilizados inicialmente, agora não façam sentido por representarem o mesmo (o seletor b e o seletor legenda são iguais ao seletor a). Se a construção fosse feita de raiz já não seria necessário defini-los.

O maior desafio desta construção foi perceber como fazer para se obter o efeito desejado, ou seja, como proceder à marcação dos pontos  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$ .



## Capítulo 9 - Conclusão

### 9.1 Trabalho futuro

No seguimento deste trabalho pensa-se que seria útil recorrer à construção de animações interativas para auxiliar a aprendizagem de outros tópicos definidos no programa de matemática de nível básico.

Por exemplo, o programa orienta para “nas construções geométricas recorrer a *software* de Geometria Dinâmica”, relativamente ao tópico circunferência (3º ciclo) e refere como objetivos específicos: “Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a do arco correspondente e determinar a área de um sector circular. Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito e de um ângulo excêntrico com a dos arcos associados. Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico”. (Ministério da Educação (2007), p. 52)

Neste caso poder-se-iam criar animações interativas, semelhantes às elaboradas no âmbito deste trabalho, que permitissem movimentar os pontos de interseção da circunferência com os lados dos ângulos, favorecendo a compreensão das propriedades dos ângulos ao centro, inscritos e excêntricos. A aquisição destes saberes seria assim facilitada porque ao interagir com um *applet*, aumentando e diminuindo a amplitude dos ângulos, a visualização da construção permitiria perceber qual a amplitude dos arcos que lhe estão associados, por exemplo.

### 9.2 Conclusões

A construção dos módulos dinâmicos referidos ao longo deste trabalho foi feita tendo em conta o público-alvo a que se destinam, os alunos do ensino básico. Procurou-se que as ilustrações tivessem uma linguagem clara, acessível, sem descuidar o rigor científico exigido neste tipo de situações.

Para elaborar as animações foi necessário recordar conhecimentos de PEDA (Programação, Estrutura de Dados e Algoritmos), muito úteis no que respeita à configuração dos objetos utilizados.

Apesar do resultado final ser aparentemente simples, a construção de animações interativas no *GeoGebra* é bastante exigente no que respeita à mobilização de saberes de Geometria, pois todos os passos têm de ser devidamente estruturados e fundamentados.

Estes módulos interativos serão uma boa ferramenta de trabalho no ensino das fórmulas do cálculo de áreas pois permitirão aos alunos, ao seu ritmo, perceberem o porquê das mesmas.

O facto dos módulos serem disponibilizadas aos alunos em HTML permite-lhes aceder facilmente aos *applet*, bastando para isso que o computador que estão a utilizar tenha um browser de internet instalado. Como as construções são acompanhadas da explicação dos passos seguidos para a elaboração das mesmas, estão estruturadas para que os alunos as consigam acompanhar individualmente, tirando as suas próprias conclusões.

Todas as animações foram construídas remetendo para as fórmulas de cálculo da área do retângulo e do paralelogramo com o objetivo facilitar a memorização baseada na compreensão e associação de saberes.

Como o público-alvo é adepto das novas tecnologias, o recurso a estas animações como ferramenta de trabalho pode estimular o gosto pela aprendizagem da Matemática.

## Bibliografia

- Araújo, P. (1998). Curso de Geometria. Lisboa: Gradiva.
- Bastos, R. (2007). *Notas sobre o ensino da Geometria: Transformações geométricas*. Educação e Matemá@ca, 88, 9-11. APM
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*, Lisboa, Ministério da Educação, DGIDC.
- Caraça, B. (1989). Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.
- Wagner, E. (1990). *Construções Geométricas*. R.J: SBM.

## Webgrafia

- GeoGebra (2012). Acedido em 10 de abril de 2013, em: [http://wiki.geogebra.org/en/Main\\_Page](http://wiki.geogebra.org/en/Main_Page)
- Hohenwarter, M. & Hohenwarter, J, (2009). *Ajuda GeoGebra Manual Oficial da Versão 3.2*. Acedido em 30 de outubro de 2012, em: [http://www.geogebra.org/help/docuPT\\_PT.pdf](http://www.geogebra.org/help/docuPT_PT.pdf)
- Knote, E. (2012). Acedido em 12 de dezembro de 2013, em: <http://wiki.geogebra.org/en/User:Knote>
- Markus Hohenwarter (2013). *GeoGebra Past & Future*. Acedido a 3 de junho de 2013, em: <http://prezi.com/eheghfw3typ/geogebra-past-future-portugal-june-2013/>
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Consultado a 2 de fevereiro de 2013 em [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/028\\_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf);
- NCTM (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston, VA: Autor.
- NMTC (2007). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Texto original publicado em 2000, Lisboa.
- Sada, M. (2005). *Área de polígonos: Figuras interactivas para deducir cómo calcular área*. Acedido em 2 de janeiro de 2013, em: [http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Area\\_Formulas](http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Area_Formulas)



## **Anexos**





## **1. DVD com animações em formato .ggb e HTML**



## **2. Fórmula de cálculo da área do retângulo**

2.1. Retângulo com dimensões variáveis

2.1.1. Ilustração *applet*

Como se calcula a área de um retângulo?

Esta animação pretende ilustrar a fórmula do cálculo da área do retângulo. Para prosseguir tens de clicar nos quadrados (■).

1. Vamos considerar que a nossa unidade de área é:



2. Faz variar o número de unidades da base movimentando o seletor Base para a direita ou para a esquerda (→←) e o número de unidades da altura, movimentando o seletor da Altura para cima ou para baixo (↑↓) e vê quantas unidades de área tens. (Podes movimentar os seletores sempre que queiras!)

3. Se observares com atenção, o número total de unidades de área obtém-se multiplicando o número de unidades da base pelo número de unidades da altura. Movimenta os seletores para ver as alterações.

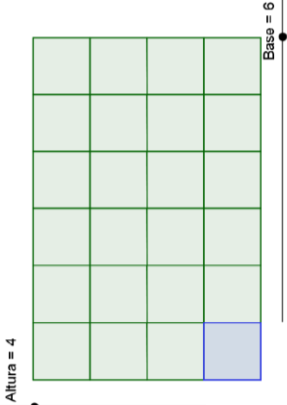
Número de unidades de área =  $6 \times 4 = 24$

4. Então, podemos concluir que a fórmula para calcular a área do retângulo é:

Área do Retângulo = Base  $\times$  Altura (unidades de área)

Nota: Para reiniciar esta animação clica no botão no canto superior direito.

Reiniciar



Nome	Descrição	Valor	Comando	Legenda
1 Número Base		Base = 6		
2 Número Altura		Altura = 4		
3 Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)	Interseção[EixoX, EixoY]	
4 Ponto C	Ponto em EixoY	C = (0, 1)	Ponto[EixoY]	
5 Ponto D		D = (1, 1)		
6 Ponto B		B = (1, 0)		
7 Quadrilátero polígono1	Polígono A, C, D, B	polígono1 = 1	Polígono[A, C, D, B]	
7 Segmento de Reta a	Segmento de Reta [A, C] de Quadrilátero polígono1	a = 1	SegmentodeReta[A, C, polígono1]	
7 Segmento de Reta c	Segmento de Reta [C, D] de Quadrilátero polígono1	c = 1	SegmentodeReta[C, D, polígono1]	
7 Segmento de Reta d	Segmento de Reta [D, B] de Quadrilátero polígono1	d = 1	SegmentodeReta[D, B, polígono1]	
7 Segmento de Reta b	Segmento de Reta [B, A] de Quadrilátero polígono1	b = 1	SegmentodeReta[B, A, polígono1]	
8 Vetor u	Vetor[A, B]	u = (1, 0)	Vetor[A, B]	
9 Vetor v	Vetor[A, C]	v = (0, 1)	Vetor[A, C]	
10 Lista lista1	Sequência[Polígono[Translação[A, Vetor[n u]], Translação[C, Vetor[n u]], Translação[D, Vetor[n	lista1 = {1, 1, 1, 1, 1, 1}	Sequência[Polígono[Translação[A, Vetor[n u]], Translação[C, Vetor[n u]], Translação[D, Vetor[n	
11 Texto texto1		"Esta animação pretende ilustrar a fórmula do...		
12 Texto texto2		"Como se calcula a área de um retângulo?"		
13 Texto texto3		"Vamos considerar que a nossa unidade de á...		
14 Ponto E		E = (-12.11, 8.7)		
15 Ponto F		F = (-11.11, 8.7)		
16 Quadrilátero polígono2	Polígono[E, F, 4]	polígono2 = 1	Polígono[E, F, 4]	
16 Segmento de Reta e	Segmento de Reta [E, F] de Quadrilátero polígono2	e = 1	SegmentodeReta[E, F, polígono2]	
16 Segmento de Reta f	Segmento de Reta [F, G] de Quadrilátero polígono2	f = 1	SegmentodeReta[F, G, polígono2]	
16 Ponto G	Polígono[E, F, 4]	G = (-11.11, 9.7)	Polígono[E, F, 4]	
16 Ponto H	Polígono[E, F, 4]	H = (-12.11, 9.7)	Polígono[E, F, 4]	
16 Segmento de Reta g	Segmento de Reta [G, H] de Quadrilátero polígono2	g = 1	SegmentodeReta[G, H, polígono2]	
16 Segmento de Reta h	Segmento de Reta [H, E] de Quadrilátero polígono2	h = 1	SegmentodeReta[H, E, polígono2]	
17 Texto texto4		"Faz variar o número de unidades da base mo...		
18 Texto texto5		"Número de unidades de área = "		
19 Número i	Produto[[Base, Altura]]	i = 24	Produto[[Base, Altura]]	
20 Texto texto8		"Se observares com atenção, o número total ...		
21 Texto texto9		"Então, podemos concluir que a fórmula para ...		
22 Textotexto11		"Área do Retângulo = Base xAltura (unidades ...		
23 Booleano j		j = true		1.
24 Booleano k		k = true		2.
25 Booleano l		l = true		3.
26 Booleano m		m = true		4.
27 Textotexto10	" + (LaTeX[Base]) + "x" + (LaTeX[Altura]) + "= " + (LaTeX[i]) + "	" + (LaTeX[Base]) + "x" + (LaTeX[Altura]) + "= " + (LaTeX[i]) + "		
28 Botão botão1		botão1		Reiniciar
29 Ponto I		I = (-1.68, 10.98)		
30 Ponto J		J = (-2.01, 10.98)		
31 Imagem imagem1		imagem1		
32 Ponto K		K = (-6.59, 8.14)		
33 Ponto L		L = (-6.9, 8.14)		
34 Imagem imagem2		imagem2		
35 Ponto M		M = (-3.16, 8.24)		
36 Ponto N		N = (-3.16, 8.55)		
37 Imagem imagem3		imagem3		
38 Texto texto6		"Nota: Para reiniciar esta animação clica no b...		
39 Lista lista2	Sequência[Translação[lista1, Vetor[n v]], n, 1, Altura - 1]	lista2 = {[{1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, ...	Sequência[Translação[lista1, Vetor[n v]], n, 1, Altura - 1]	

2.2. Retângulo com dimensões que não são números inteiros

2.2.1. Ilustração *applet*

Área do retângulo

Esta animação pretende ilustrar a fórmula do cálculo da área do retângulo quando as dimensões não são números inteiros. Para avançares tens de clicar nos quadrados (□).

1. Observa o retângulo [ACBD], com altura 1,5 unidades de comprimento (1,5 UC) e largura 3 UC. Vamos dividi-lo considerando como unidade de área o quadrado identificado como UA, cuja medida de comprimento do lado é 1 UC (unidade de comprimento)

☒ Mostrar UA    ☐ Divisão segundo UA    ☒ Área = 1,5 + 1,5 + 1,5 = 3 x 1,5 = 4,5 UA, ou seja, 3 unidades ao comprimento x 1,5 unidades à altura

2. Como temos 1,5 unidades de comprimento em altura, para ser mais simples perceber, podemos considerar uma nova unidade de área que seja um quarto da primeira (dividindo cada lado em duas partes iguais). Vamos ler então em conta a nova unidade de área UA2.

Nota: Podes desativar as opções anteriores sempre que quiseres.

☐ Mostrar UA2    ☐ Divisão segundo UA2    ☒ Área = 18 UA2 = 6 unidades de comprimento na base x 3 unidades de comprimento na altura

Cada unidade de área UA2 é um quarto da UA, então:

Área = 18 : 4 = 4,5 UA

3. Outra forma de ilustrar esta situação, com base no sistema decimal, será considerar uma nova unidade de área que seja obtida dividindo UA em 100 novas unidades de área (que se obtém dividindo cada lado da unidade em dez partes iguais)

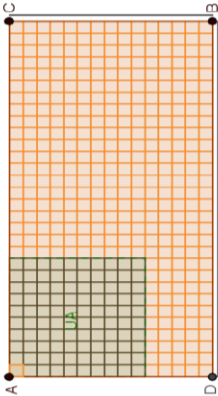
Nota: Podes desativar as opções anteriores sempre que quiseres.

☒ Mostrar UA3    ☒ Divisão segundo UA3

☒ Área = 450 UA3 = 30 unidades de comprimento na base x 15 unidades de comprimento na altura

Cada unidade de área UA3 é uma centésima da UA, então:

Área = 450 : 100 = 4,5 UA



☒ Podemos concluir que a fórmula que se usa para calcular a área do retângulo nestas situações é a mesma que se utiliza para dimensões inteiras:

Área do retângulo = Base x Altura (unidades de área)

Reiniciar

## 2.2.2. Protocolo de construção

N	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Ponto em EixoY	A = (0, 3)	Ponto[EixoY]	
2	Ponto B	Ponto em EixoX	B = (6, 0)	Ponto[EixoX]	
3	Ponto C		C = (6, 3)		
4	Ponto D	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	D = (0, 0)	Interseção[EixoX, EixoY]	
5	Quadrilátero polígono1	Polígono C, A, D, B	polígono1 = 18	Polígono[C, A, D, B]	
5	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [C, A] de Quadrilátero polígono1	c = 6	SegmentoReta[C, A, polígono1]	
5	Segmento de Reta a	Segmento de Reta [A, D] de Quadrilátero polígono1	a = 3	SegmentoReta[A, D, polígono1]	
5	Segmento de Reta d	Segmento de Reta [D, B] de Quadrilátero polígono1	d = 6	SegmentoReta[D, B, polígono1]	
5	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [B, C] de Quadrilátero polígono1	b = 3	SegmentoReta[B, C, polígono1]	
6	Texto texto1		"Área do retângulo"		
7	Texto texto2		"Observa o retângulo [ACBD], com altura 1,5 u...		
8	Texto texto3		"= 1,5 + 1,5 + 1,5 = 3 x 1,5 = 4,5 UA, ou seja, 3 ...		
9	Texto texto2		"Como temos 1,5 unidades de comprimento ...		
10	Ponto E	Ponto em a	E = (0, 1)	Ponto[a]	
11	Quadrilátero UA1	Polígono[A, E, 4]	UA1 = 4	Polígono[A, E, 4]	UA
11	Segmento de Reta f	Segmento de Reta [A, E] de Quadrilátero UA1	f = 2	SegmentoReta[A, E, UA1]	
11	Segmento de Reta g	Segmento de Reta [E, F] de Quadrilátero UA1	g = 2	SegmentoReta[E, F, UA1]	
11	Ponto F	Polígono[A, E, 4]	F = (2, 1)	Polígono[A, E, 4]	
11	Ponto G	Polígono[A, E, 4]	G = (2, 3)	Polígono[A, E, 4]	
11	Segmento de Reta h	Segmento de Reta [F, G] de Quadrilátero UA1	h = 2	SegmentoReta[F, G, UA1]	
11	Segmento de Reta i	Segmento de Reta [G, A] de Quadrilátero UA1	i = 2	SegmentoReta[G, A, UA1]	
12	Vetor u	Vetor[A, G]	u = (2, 0)	Vetor[A, G]	
13	Lista lista1	Sequência[Translação[UA1, Vetor[n u]], n, 0, 2]	lista1 = {4, 4, 4}	Sequência[Translação[UA1, Vetor[n u]], n, 0, 2]	UA
14	Ponto H	Ponto em d	H = (2, 0)	Ponto[d]	
15	Quadrilátero polígono3	Polígono E, F, H, D	polígono3 = 2	Polígono[E, F, H, D]	
15	Segmento de Reta e <sub>1</sub>	Segmento de Reta [E, F] de Quadrilátero polígono3	e <sub>1</sub> = 2	SegmentoReta[E, F, polígono3]	
15	Segmento de Reta f <sub>1</sub>	Segmento de Reta [F, H] de Quadrilátero polígono3	f <sub>1</sub> = 1	SegmentoReta[F, H, polígono3]	
15	Segmento de Reta h <sub>1</sub>	Segmento de Reta [H, D] de Quadrilátero polígono3	h <sub>1</sub> = 2	SegmentoReta[H, D, polígono3]	
15	Segmento de Reta d <sub>1</sub>	Segmento de Reta [D, E] de Quadrilátero polígono3	d <sub>1</sub> = 1	SegmentoReta[D, E, polígono3]	
16	Ponto I	Ponto em a	I = (0, 2)	Ponto[a]	
17	Quadrilátero UA2	Polígono[A, I, 4]	UA2 = 1	Polígono[A, I, 4]	
17	Segmento de Reta j	Segmento de Reta [A, I] de Quadrilátero UA2	j = 1	SegmentoReta[A, I, UA2]	
17	Segmento de Reta k	Segmento de Reta [I, J] de Quadrilátero UA2	k = 1	SegmentoReta[I, J, UA2]	
17	Ponto J	Polígono[A, I, 4]	J = (1, 2)	Polígono[A, I, 4]	
17	Ponto K	Polígono[A, I, 4]	K = (1, 3)	Polígono[A, I, 4]	
17	Segmento de Reta l	Segmento de Reta [J, K] de Quadrilátero UA2	l = 1	SegmentoReta[J, K, UA2]	
17	Segmento de Reta m	Segmento de Reta [K, A] de Quadrilátero UA2	m = 1	SegmentoReta[K, A, UA2]	
18	Vetor v	Vetor[A, K]	v = (1, 0)	Vetor[A, K]	
19	Vetor w	Vetor[A, I]	w = (0, -1)	Vetor[A, I]	
20	Lista lista3	Sequência[Translação[Sequência[Translação[U, Vetor[n v]], n, 0, 5], Vetor[m w]], m, 0, 2]	lista3 = {[1, 1, 1, 1, 1, 1], {1, 1, 1, 1, 1, 1], {1, 1, ...	Sequência[Translação[Sequência[Translação[U, Vetor[n v]], n, 0, 5], Vetor[m w]], m, 0, 2]	
21	Ponto L		L = (0, 2.5)		
22	Vetor s	Vetor[A, L]	s = (0, -0.5)	Vetor[A, L]	
23	Ponto O		O = (0, 2.75)		
24	Vetor v <sub>1</sub>	Vetor[A, O]	v <sub>1</sub> = (0, -0.25)	Vetor[A, O]	
25	Lista lista2	Sequência[Polígono[Translação[E, Vetor[n u]], Translação[F, Vetor[n u]], Translação[H, Vetor[n ...	lista2 = {2, 2, 2}	Sequência[Polígono[Translação[E, Vetor[n u]], Translação[F, Vetor[n u]], Translação[H, Vetor[n ...	
26	Texto texto3 <sub>1</sub>		"= 18 UA2 = 6 unidades de comprimento na b...		
27	Texto texto2 <sub>2</sub>		"Outra forma de ilustrar esta situação, com ba...		
28	Texto texto3 <sub>2</sub>		"= 450 UA3 = 30 unidades de comprimento na...		





N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
69	Ponto E	Translação de E por v	$E = (1, 1)$	Translação[E, v]	
70	Ponto A <sub>1</sub>	Translação de A por w	$A_1 = (0, 2)$	Translação[A, w]	
71	Ponto P'	Translação de P por w	$P' = (2, 2)$	Translação[P, w]	
72	Lista lista5	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n z]], Translação[E, Vetor[n z]]], n, 0, 10]	lista5 = {2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n z]], Translação[E, Vetor[n z]]], n, 0, 10]	
73	Lista lista6	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n t]], Translação[P, Vetor[n t]]], n, 0, 10]	lista6 = {2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n t]], Translação[P, Vetor[n t]]], n, 0, 10]	
74	Lista lista7	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n v]], Translação[E, Vetor[n v]]], n, 0, 2]	lista7 = {2, 2, 2}	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n v]], Translação[E, Vetor[n v]]], n, 0, 2]	
75	Lista lista8	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n w]], Translação[P, Vetor[n w]]], n, 0, 2]	lista8 = {2, 2, 2}	Sequência[SegmentodeReta[Translação[A, Vetor[n w]], Translação[P, Vetor[n w]]], n, 0, 2]	
76	Texto texto4		*Nota: Podes desativar as opções anteriores ...		
77	Texto texto5		*Esta animação pretende ilustrar a fórmula do...		
78	Texto texto4 <sub>1</sub>		*Nota: Podes desativar as opções anteriores ...		
79	Ponto Q		$Q = (3.72, 7.87)$		
80	Ponto B <sub>1</sub>		$B_1 = (3.72, 7.53)$		
81	Imagem imagem1		imagem1		
82	Texto texto0		"UA"		
83	Texto texto0 <sub>1</sub>		"UA"		
84	Texto texto0 <sub>2</sub>		"UA"		
85	Texto texto0 <sub>3</sub>		"0,5 UA"		
86	Texto texto0 <sub>4</sub>		"0,5 UA"		
87	Texto texto0 <sub>5</sub>		"0,5 UA"		
88	Textotexto10		*Podemos concluir que a fórmula que se usa ...		

### 3. Fórmula de cálculo da área do paralelogramo

#### 3.1. Ilustração *applet*

Reiniciar

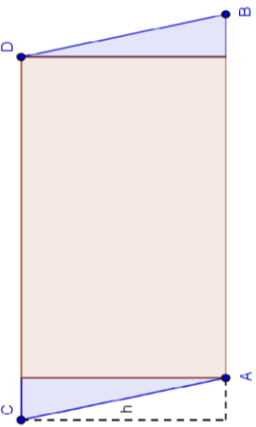
Deslocar triângulo

Anular deslocação

Conclusão:

Já sabes que a área do retângulo é dada por:  $A = \text{base} \times \text{altura}$ , então a área do paralelogramo será dada por:

Área do Paralelogramo = base  $\times$  altura =  $b \times h$  (unidades de área)



Iniciar animação

Parar animação

Esta animação pretende ilustrar a fórmula de cálculo da área do paralelogramo não retângulo. Para prosseguires tens de clicar nos quadrados (□).

☒ 1. Considera o paralelogramo [ACDB], cujas medidas dos comprimentos da base e da altura são b e h respetivamente.

☒ 2. É possível decompor o paralelogramo em dois triângulos retângulos geometricamente iguais (pelo critério LLL) e um retângulo. Vamos recorrer a isso para transformar um paralelogramo num retângulo com a mesma área, deslocando um dos triângulos na horizontal.

Repara que se moveres o lado [CD] do paralelogramo paralelamente ao lado [AB] a área do paralelogramos mantém-se porque a altura e a base também se mantêm. Podes clicar no botão - Iniciar animação - para confirmarl

13

### 3.1. Protocolo de construção

Nº	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	$A = (0, 0)$	Intersectar[EixoX, EixoY]	
2	Ponto B	Ponto em EixoX	$B = (6, 0)$	Ponto[EixoX]	
3	Número a		$a = -0.7$		
4	Ponto C	$(a, 3)$	$C = (-0.7, 3)$	$(a, 3)$	
5	Ponto D	$(a + 6, 3)$	$D = (5.3, 3)$	$(a + 6, 3)$	
6	Quadrilátero polígono1	Polígono A, C, D, B	polígono1 = 18	Polígono[A, C, D, B]	
6	Segmento de Reta $a_1$	Segmento de Reta [A, C] de Quadrilátero polígono1	$a_1 = 3.08$	SegmentodeReta[A, C, polígono1]	
6	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [C, D] de Quadrilátero polígono1	$c = 6$	SegmentodeReta[C, D, polígono1]	
6	Segmento de Reta d	Segmento de Reta [D, B] de Quadrilátero polígono1	$d = 3.08$	SegmentodeReta[D, B, polígono1]	
6	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [B, A] de Quadrilátero polígono1	$b = 6$	SegmentodeReta[B, A, polígono1]	
7	Reta e	Reta que contém C e é perpendicular a EixoX	$e: x = -0.7$	Perpendicular[C, EixoX]	
8	Ponto E	Pontos de Interseção de EixoX, e	$E = (-0.7, 0)$	Intersectar[EixoX, e]	
9	Segmento de Reta h	Segmento de Reta [C, E]	$h = 3$	SegmentodeReta[C, E]	
10	Triângulo polígono2	Polígono C, E, A	polígono2 = 1.05	Polígono[C, E, A]	
10	Segmento de Reta $a_2$	Segmento de Reta [C, E] de Triângulo polígono2	$a_2 = 3$	SegmentodeReta[C, E, polígono2]	
10	Segmento de Reta $c_1$	Segmento de Reta [E, A] de Triângulo polígono2	$c_1 = 0.7$	SegmentodeReta[E, A, polígono2]	
10	Segmento de Reta $e_1$	Segmento de Reta [A, C] de Triângulo polígono2	$e_1 = 3.08$	SegmentodeReta[A, C, polígono2]	
11	Vetor u	Vetor[A, B]	$u = (6, 0)$	Vetor[A, B]	
12	Ponto F	Pontos de Interseção de b, h	F não definido(a)	Intersectar[b, h]	
13	Quadrilátero polígono3	Polígono C, D, B, F	polígono3 não definido(a)	Polígono[C, D, B, F]	
13	Segmento de Reta $c_2$	Segmento de Reta [C, D] de Quadrilátero polígono3	$c_2 = 6$	SegmentodeReta[C, D, polígono3]	
13	Segmento de Reta $d_1$	Segmento de Reta [D, B] de Quadrilátero polígono3	$d_1 = 3.08$	SegmentodeReta[D, B, polígono3]	
13	Segmento de Reta $b_1$	Segmento de Reta [B, F] de Quadrilátero polígono3	$b_1$ não definido(a)	SegmentodeReta[B, F, polígono3]	
13	Segmento de Reta f	Segmento de Reta [F, C] de Quadrilátero polígono3	f não definido(a)	SegmentodeReta[F, C, polígono3]	
14	Botão botão1		botão1		Iniciar animação
15	Botão botão2		botão2		Parar animação
16	Número g		$g = 0$		
17	Ponto C'	Translação de C por g u	$C' = (-0.7, 3)$	Translação[C, Vetor[g u]]	
18	Ponto E'	Translação de E por g u	$E' = (-0.7, 0)$	Translação[E, Vetor[g u]]	
19	Ponto A'	Translação de A por g u	$A' = (0, 0)$	Translação[A, Vetor[g u]]	
20	Triângulo polígono2'	Polígono C', E', A'	polígono2' = 1.05	Polígono[C', E', A']	
20	Segmento de Reta $a'$	Segmento de Reta [C', E'] de Triângulo polígono2'	$a' = 3$	SegmentodeReta[C', E', polígono2']	
20	Segmento de Reta $c'$	Segmento de Reta [E', A'] de Triângulo polígono2'	$c' = 0.7$	SegmentodeReta[E', A', polígono2']	
20	Segmento de Reta $e'$	Segmento de Reta [A', C'] de Triângulo polígono2'	$e' = 3.08$	SegmentodeReta[A', C', polígono2']	
21	Texto texto1		*Repara que se moveres o lado [CD] do paralelo...		
22	Ponto G	Pontos de Interseção de $c'$ , $a'$	$G = (-0.7, 0)$	Intersectar[c', a']	
23	Ponto H	Ponto em u	$H = (5, 0)$	Ponto[u]	
24	Ponto I	Pontos de Interseção de $c_2$ , EixoY	$I = (0, 3)$	Intersectar[c_2, EixoY]	
25	Triângulo polígono4	Polígono A, C, I	polígono4 = 1.05	Polígono[A, C, I]	
25	Segmento de Reta i	Segmento de Reta [A, C] de Triângulo polígono4	$i = 3.08$	SegmentodeReta[A, C, polígono4]	
25	Segmento de Reta $a_3$	Segmento de Reta [C, I] de Triângulo polígono4	$a_3 = 0.7$	SegmentodeReta[C, I, polígono4]	
25	Segmento de Reta $c_3$	Segmento de Reta [I, A] de Triângulo polígono4	$c_3 = 3$	SegmentodeReta[I, A, polígono4]	
26	Ponto A' <sub>1</sub>	Translação de A por u g	$A'_1 = (0, 0)$	Translação[A, Vetor[u g]]	
27	Ponto C' <sub>1</sub>	Translação de C por u g	$C'_1 = (-0.7, 3)$	Translação[C, Vetor[u g]]	
28	Ponto I'	Translação de I por u g	$I' = (0, 3)$	Translação[I, Vetor[u g]]	
29	Triângulo polígono4'	Polígono A' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> , I'	polígono4' = 1.05	Polígono[A' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> , I']	
29	Segmento de Reta i'	Segmento de Reta [A' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono4'	$i' = 3.08$	SegmentodeReta[A' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> , polígono4']	
29	Segmento de Reta $a'_1$	Segmento de Reta [C' <sub>1</sub> , I'] de Triângulo polígono4'	$a'_1 = 0.7$	SegmentodeReta[C' <sub>1</sub> , I', polígono4']	
29	Segmento de Reta $c'_1$	Segmento de Reta [I', A' <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono4'	$c'_1 = 3$	SegmentodeReta[I', A' <sub>1</sub> , polígono4']	
30	Triângulo polígono6	Polígono A, C, I	polígono6 = 1.05	Polígono[A, C, I]	

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
30	Segmento de Reta $l_2$	Segmento de Reta [A, C] de Triângulo polígono6	$l_2 = 3.08$	SegmentodeReta[A, C, polígono6]	
30	Segmento de Reta $a_5$	Segmento de Reta [C, I] de Triângulo polígono6	$a_5 = 0.7$	SegmentodeReta[C, I, polígono6]	
30	Segmento de Reta $c_4$	Segmento de Reta [I, A] de Triângulo polígono6	$c_4 = 3$	SegmentodeReta[I, A, polígono6]	
31	Texto texto2		É possível decompor o paralelogramo em dois ...		
32	Texto texto5		"Área do Paralelogramo"		
33	Texto texto6		"Já sabes que a área do retângulo é dada por: A...		
34	Texto texto7		"Área do Paralelogramo = base x altura = b x h (...)		
35	Booleano j		j = true		Conclusão:
36	Booleano k		k = true		2.
37	Booleano l		l = true		
38	Botão botão3		botão3		Reiniciar
39	Segmento de Reta n	Segmento de Reta [E, A]	n = 0.7	SegmentodeReta[E, A]	
40	Ponto J	(6 + a, 0)	J = (5.3, 0)	(6 + a, 0)	
41	Segmento de Reta h'	Segmento de Reta [D, J]	h' = 3	SegmentodeReta[D, J]	h
42	Segmento de Reta q	Segmento de Reta [J, B]	q = 0.7	SegmentodeReta[J, B]	
43	Botão Deslocar		Deslocar		Deslocar triângulo
44	Botão botão5		botão5		Anular deslocção
45	Texto texto8		"Esta animação pretende ilustrar a fórmula de c...		
46	Ponto K		K = (7.96, 8.18)		
47	Ponto L		L = (7.62, 8.18)		
48	Imagem imagem1		imagem1		
49	Segmento de Reta m	Segmento de Reta [A, E]	m = 0.7	SegmentodeReta[A, E]	
50	Segmento de Reta p	Segmento de Reta [E, B]	p = 6.7	SegmentodeReta[E, B]	
51	Reta r	Reta que contém B e é perpendicular a c	r: x = 6	Perpendicular[B, c]	
52	Ponto M	Pontos de Interseção de c, $c_2$	M não definido(a)	Intersectar[c, $c_2$ ]	
53	Ponto N	Pontos de Interseção de r, c	N não definido(a)	Intersectar[r, c]	
54	Segmento de Reta t	Segmento de Reta [C, E]	t = 3	SegmentodeReta[C, E]	
55	Reta $f_1$	Reta que contém A e é perpendicular a $c_2$	$f_1: x = 0$	Perpendicular[A, $c_2$ ]	
56	Ponto O	Pontos de Interseção de $f_1$ , $c_2$	O = (0, 3)	Intersectar[ $f_1$ , $c_2$ ]	
57	Triângulo polígono7	Polígono B, N, D	polígono7 não definido(a)	Polígono[B, N, D]	
57	Segmento de Reta $d_3$	Segmento de Reta [B, N] de Triângulo polígono7	$d_3$ não definido(a)	SegmentodeReta[B, N, polígono7]	
57	Segmento de Reta $b_3$	Segmento de Reta [N, D] de Triângulo polígono7	$b_3$ não definido(a)	SegmentodeReta[N, D, polígono7]	
57	Segmento de Reta $n_1$	Segmento de Reta [D, B] de Triângulo polígono7	$n_1 = 3.08$	SegmentodeReta[D, B, polígono7]	
58	Triângulo polígono9	Polígono D, J, B	polígono9 = 1.05	Polígono[D, J, B]	
58	Segmento de Reta $b_5$	Segmento de Reta [D, J] de Triângulo polígono9	$b_5 = 3$	SegmentodeReta[D, J, polígono9]	
58	Segmento de Reta $d_4$	Segmento de Reta [J, B] de Triângulo polígono9	$d_4 = 0.7$	SegmentodeReta[J, B, polígono9]	
58	Segmento de Reta $j_2$	Segmento de Reta [B, D] de Triângulo polígono9	$j_2 = 3.08$	SegmentodeReta[B, D, polígono9]	
59	Quadrilátero polígono6	Polígono I, A, J, D	polígono6 = 15.9	Polígono[I, A, J, D]	
59	Segmento de Reta $i_1$	Segmento de Reta [I, A] de Quadrilátero polígono6	$i_1 = 3$	SegmentodeReta[I, A, polígono6]	
59	Segmento de Reta $a_4$	Segmento de Reta [A, J] de Quadrilátero polígono6	$a_4 = 5.3$	SegmentodeReta[A, J, polígono6]	
59	Segmento de Reta $j_1$	Segmento de Reta [J, D] de Quadrilátero polígono6	$j_1 = 3$	SegmentodeReta[J, D, polígono6]	
59	Segmento de Reta $d_2$	Segmento de Reta [D, I] de Quadrilátero polígono6	$d_2 = 5.3$	SegmentodeReta[D, I, polígono6]	
60	Quadrilátero polígono8	Polígono E, B, N, C	polígono8 não definido(a)	Polígono[E, B, N, C]	
60	Segmento de Reta $e_2$	Segmento de Reta [E, B] de Quadrilátero polígono8	$e_2 = 6.7$	SegmentodeReta[E, B, polígono8]	b
60	Segmento de Reta $b_2$	Segmento de Reta [B, N] de Quadrilátero polígono8	$b_2$ não definido(a)	SegmentodeReta[B, N, polígono8]	
60	Segmento de Reta $n_2$	Segmento de Reta [N, C] de Quadrilátero polígono8	$n_2$ não definido(a)	SegmentodeReta[N, C, polígono8]	
60	Segmento de Reta $c_5$	Segmento de Reta [C, E] de Quadrilátero polígono8	$c_5 = 3$	SegmentodeReta[C, E, polígono8]	
61	Texto texto3		"b"		
62	Segmento de Reta s	Segmento de Reta [C, E]	s = 3	SegmentodeReta[C, E]	h
N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
63	Booleano o		o = true		1.
64	Texto texto4		"Considera o paralelogramo [ACDB], cujas medi...		

#### **4. Fórmula de cálculo da área do triângulo**

4.1. Como determinar a área de um triângulo?

4.1.1. Ilustração *applet*

Como determinar a área de um triângulo?

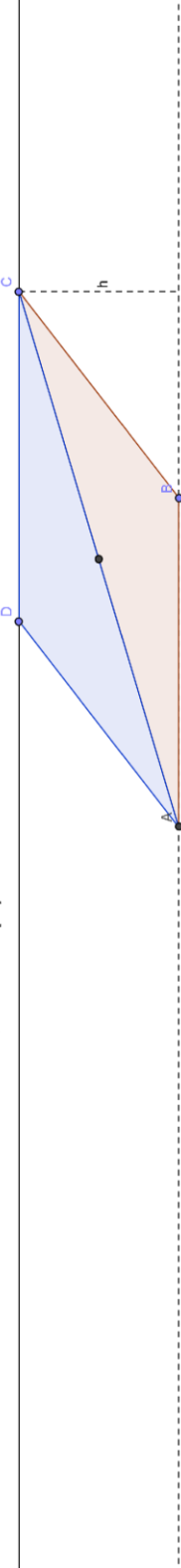
Esta animação pretende ilustrar a fórmula do cálculo da área do triângulo. Para avançares tens de clicar nos quadrados (□).

- ☒ 1. Considera o triângulo [ABC], cujas medidas dos comprimentos da base e da altura são b e h respetivamente. Movimenta o seletor abaixo (□).  
Repara que se deslocarmos o ponto C sobre uma reta paralela à base ([AB]), a altura mantém-se e a base também.

Ponto C

- ☒ 2. Vamos começar por determinar o ponto médio da aresta [AC].

☒ Ponto Médio [AC]



- ☒ 3 Depois vamos obter um novo triângulo, semelhante ao [ABC], por rotação deste, com centro no ponto médio da aresta [AC] e amplitude 180°.

Nota: para prosseguires a rotação tem de estar efetuado!

- ☒ 4. Como podes ver, obtém-se um paralelogramo, cuja área já sabes calcular. Para isso usa-se a fórmula seguinte: Área do Paralelogramo = base x altura = b x h

- ☒ 5. Como o paralelogramo é constituído por dois triângulos geometricamente iguais, a área de cada um deles será metade da área do paralelogramo, ou seja,

Área do Triângulo =  $\frac{b \times h}{2}$  (unidades de área)

Nota: Ficas então a saber que a área de um triângulo não se altera se movermos um vértice sobre uma reta paralela à base, porque as medidas dos comprimentos da base e da altura não se alteram!  
Podes voltar a movimentar o seletor do ponto 1 para confirmar.

Reiniciar

## 4.1. 2. Protocolo de construção

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
1	Número Ponto $p_1$		Ponto $p_1 = 13$		Ponto C
2	Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	$A = (0, 0)$	Intersectar[EixoX, EixoY]	
3	Ponto B	Ponto em EixoX	$B = (8, 0)$	Ponto[EixoX]	
4	Reta $a_2$		$a_2: y = 4$		
5	Ponto C	(Ponto $p_1$ , 4)	$C = (13, 4)$	(Ponto $p_1$ , 4)	
6	Triângulo polígono1	Polígono C, A, B	polígono1 = 16	Polígono[C, A, B]	
6	Segmento de Reta $b_1$	Segmento de Reta [C, A] de Triângulo polígono1	$b_1 = 13.6$	SegmentodeReta[C, A, polígono1]	
6	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [A, B] de Triângulo polígono1	$b = 8$	SegmentodeReta[A, B, polígono1]	
6	Segmento de Reta $a_1$	Segmento de Reta [B, C] de Triângulo polígono1	$a_1 = 6.4$	SegmentodeReta[B, C, polígono1]	
7	Reta d	Reta que contém C e é perpendicular a b	$d: x = 13$	Perpendicular[C, b]	
8	Reta $c_3$	Reta que contém A, B	$c_3: y = 0$	Reta[A, B]	
9	Reta e	Reta que contém C e é perpendicular a $c_3$	$e: x = 13$	Perpendicular[C, $c_3$ ]	
10	Ponto D $p_1$	Pontos de Interseção de e, $c_3$	$D_1 = (13, 0)$	Intersectar[e, $c_3$ ]	
11	Segmento de Reta h	Segmento de Reta [C, D $p_1$ ]	$h = 4$	SegmentodeReta[C, D $p_1$ ]	
12	Texto texto1		"Como determinar a área de um triângulo?"		
13	Texto texto2		"Nota: Ficas então a saber que a área de um tri...		
14	Texto texto3		"Vamos começar por determinar o ponto médio ...		
15	Ponto E	Ponto Médio de A, C	$E = (6.5, 2)$	PontoMédio[A, C]	
16	Número Área		Área = 1		
17	Ponto A'	Imagem de A na rotação de ângulo $180^\circ$ b	$A' = (0, 0)$	Rotação[A, $180^\circ$ b, E]	
18	Ponto B'	Imagem de B na rotação de ângulo $180^\circ$ b	$B' = (8, 0)$	Rotação[B, $180^\circ$ b, E]	
19	Ponto C'	Imagem de C na rotação de ângulo $180^\circ$ b	$C' = (13, 4)$	Rotação[C, $180^\circ$ b, E]	
20	Ponto C' $_1$	Imagem de C na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$C'_1 = (0, 0)$	Rotação[C, (Área $180^\circ$ ), E]	
21	Ponto A' $_1$	Imagem de A na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$A'_1 = (13, 4)$	Rotação[A, (Área $180^\circ$ ), E]	
22	Ponto B' $_1$	Imagem de B na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$B'_1 = (5, 4)$	Rotação[B, (Área $180^\circ$ ), E]	
23	Triângulo polígono1'	Polígono C' $_1$ , A' $_1$ , B' $_1$	polígono1' = 16	Polígono[C' $_1$ , A' $_1$ , B' $_1$ ]	
23	Segmento de Reta b' $_1$	Segmento de Reta [C' $_1$ , A' $_1$ ] de Triângulo polígono1'	$b'_1 = 13.6$	SegmentodeReta[C' $_1$ , A' $_1$ , polígono1']	
23	Segmento de Reta c' $_1$	Segmento de Reta [A' $_1$ , B' $_1$ ] de Triângulo polígono1'	$c'_1 = 8$	SegmentodeReta[A' $_1$ , B' $_1$ , polígono1']	
23	Segmento de Reta a' $_1$	Segmento de Reta [B' $_1$ , C' $_1$ ] de Triângulo polígono1'	$a'_1 = 6.4$	SegmentodeReta[B' $_1$ , C' $_1$ , polígono1']	
24	Ponto A' $_2$	Imagem de A na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$A'_2 = (13, 4)$	Rotação[A, (Área $180^\circ$ ), E]	
25	Ponto B' $_2$	Imagem de B na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$B'_2 = (5, 4)$	Rotação[B, (Área $180^\circ$ ), E]	
26	Ponto C' $_2$	Imagem de C na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$C'_2 = (0, 0)$	Rotação[C, (Área $180^\circ$ ), E]	
27	Ponto A' $_3$	Imagem de A na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$A'_3 = (13, 4)$	Rotação[A, (Área $180^\circ$ ), E]	
28	Ponto D	Imagem de B na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$D = (5, 4)$	Rotação[B, (Área $180^\circ$ ), E]	
29	Ponto C' $_3$	Imagem de C na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$C'_3 = (0, 0)$	Rotação[C, (Área $180^\circ$ ), E]	
30	Ponto A''	Imagem de A' na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$A'' = (13, 4)$	Rotação[A', (Área $180^\circ$ ), E]	
31	Ponto B''	Imagem de B' na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$B'' = (5, 4)$	Rotação[B', (Área $180^\circ$ ), E]	
32	Ponto C''	Imagem de C' na rotação de ângulo (Área $180^\circ$ )	$C'' = (0, 0)$	Rotação[C', (Área $180^\circ$ ), E]	
33	Texto texto4		"Depois vamos obter um novo triângulo, semelh...		
34	Texto texto5		"Como podes ver, obtém-se um paralelogramo, ...		
35	Texto texto6		"Área do Paralelogramo = base x altura = b x h"		
36	Texto texto7		"Como o paralelogramo é constituído por dois tri...		
37	Texto texto8		$= \frac{1}{2}bh$		
38	Booleano a		$a = \text{true}$		Ponto Médio [AC]
39	Booleano c		$c = \text{true}$		1.
40	Booleano f		$f = \text{true}$		2.
41	Booleano g		$g = \text{true}$		3
42	Botão botão3		botão3		Efetuar rotação
43	Botão botão4		botão4		Anular rotação

Id	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
44	Booleano i		i = true		4.
45	Booleano j		j = true		5.
46	Botão botão6		botão6		Reiniciar
47	Texto texto9		"Esta animação pretende ilustrar a fórmula do c..."		
48	Texto texto11	"Área de " + (Nome[C]) + (Nome[A]) + (Nome[B]) + " = " + polígono1	"Área de CAB = 16"	"Área de " + (Nome[C]) + (Nome[A]) + (Nome[B]) + " = " + polígono1	
49	Texto texto12	"Área de " + (Nome[C]) + (Nome[A]) + (Nome[B]) + " = " + polígono1	"Área de CAB = 16"	"Área de " + (Nome[C]) + (Nome[A]) + (Nome[B]) + " = " + polígono1	
50	Ponto F		F = (3.33, 8.84)		
51	Ponto G		G = (2.85, 8.84)		
52	Imagem imagem1		imagem1		
53	Texto texto10		"Considera o triângulo [ABC], cujas medidas do..."		
54	Ponto H		H = (4.97, 7.37)		
55	Ponto I		I = (5.86, 7.37)		
56	Imagem imagem2		imagem2		
57	Texto texto13		"Nota: para prosseguires a rotação tem de estar..."		
58	Texto texto14		"Área do Triângulo"		
59	Texto texto15		"(unidades de área)"		



4.2. Um segundo olhar sobre a fórmula de cálculo da área de um triângulo

4.2.1. Ilustração *applet*

Um outro olhar sobre a fórmula de cálculo da área do triângulo...

Vamos ver outra forma de ilustrar a fórmula do cálculo da área do triângulo. Para prosseguires tens de clicar nos quadrados (□).

- ☒ 1. Observa o triângulo [ABC] (cujos ângulos adjacentes ao lado [AB] são agudos) e a reta  $r$  paralela ao lado [AB] que contém o vértice C.
- ☒ 2. Vamos desenharmos a altura, relativa a [AB] (base). As medidas dos comprimentos da base é  $b$  e da altura é  $h$ . Se deslocarmos o ponto C sobre a reta a altura mantém-se e a base também.
- ☒ 3. Temos de marcar o ponto médio da altura (ponto M).
- ☒ 4. Depois vamos desenharmos uma reta paralela à base que passe pelo ponto médio da altura
- ☒ 5. De seguida é simples assinalar os pontos da interseção da reta desenhada anteriormente com cada um dos lados [AC] e [BC], ponto F e ponto G, respetivamente.
- ☒ 6. Se olharmos para o triângulo [ABC] percebes que se pode decompor nos triângulos laranja [FCM] e verde [CMG] e no quadrilátero azul [AFGB]
- ☒ 7. Vamos ver o que obténs se rodarmos o triângulo laranja [FCM], com centro no ponto F e amplitude  $180^\circ$  e o triângulo verde [CMG], com centro em G e amplitude  $-180^\circ$  (no sentido dos ponteiros do relógio).

Efetuar rotação

Anular Rotação

Atenção: Só podes prosseguir se tiveres efetuado a rotação

Parar

Deslocar ponto C

- ☒ 8. Obténs o retângulo [AM'M<sub>1</sub>B], com a mesma base do triângulo e metade da sua altura. Já sabes que a área do retângulo se calcula usando a fórmula:

$$Área[AM'M_1B] = base \times altura = b \times \frac{h}{2}$$

Então, ficas a saber que a fórmula que permite calcular a área do triângulo é:

$$Área \text{ do triângulo} = \frac{b \times h}{2} \quad (\text{unidades de área})$$

Reiniciar

## 4.2. 2. Protocolo de construção

N	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
1	Número d		$d = 4,9$		
2	Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	$A = (0, 0)$	Intersectar[EixoX, EixoY]	
3	Ponto B		$B = (7, 0)$		
4	Reta D		$D: y = 3,5$		
5	Ponto C	$(d, 3,5)$	$C = (4,9, 3,5)$	$(d, 3,5)$	
6	Triângulo polígono1	Polígono A, B, C	polígono1 = 12.25	Polígono[A, B, C]	
6	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [A, B] de Triângulo polígono1	$c = 7$	SegmentodeReta[A, B, polígono1]	
6	Segmento de Reta a	Segmento de Reta [B, C] de Triângulo polígono1	$a = 4,08$	SegmentodeReta[B, C, polígono1]	
6	Segmento de Reta $b_2$	Segmento de Reta [C, A] de Triângulo polígono1	$b_2 = 6,02$	SegmentodeReta[C, A, polígono1]	
7	Reta e	Reta que contém C e é perpendicular a c	$e: x = 4,9$	Perpendicular[C, c]	
8	Ponto E	Pontos de Interseção de e, c	$E = (4,9, 0)$	Intersectar[e, c]	
9	Segmento de Reta h	Segmento de Reta [C, E]	$h = 3,5$	SegmentodeReta[C, E]	
10	Ponto M	Ponto Médio de C, E	$M = (4,9, 1,75)$	PontoMédio[C, E]	
11	Reta f	Reta que contém M e é paralela a c	$f: y = 1,75$	Reta[M, c]	
12	Ponto F	Pontos de Interseção de f, $b_2$	$F = (2,45, 1,75)$	Intersectar[f, $b_2$ ]	
13	Ponto G	Pontos de Interseção de f, a	$G = (5,95, 1,75)$	Intersectar[f, a]	
14	Triângulo polígono2	Polígono F, M, C	polígono2 = 2.14	Polígono[F, M, C]	
14	Segmento de Reta $c_1$	Segmento de Reta [F, M] de Triângulo polígono2	$c_1 = 2,45$	SegmentodeReta[F, M, polígono2]	
14	Segmento de Reta $f_1$	Segmento de Reta [M, C] de Triângulo polígono2	$f_1 = 1,75$	SegmentodeReta[M, C, polígono2]	
14	Segmento de Reta pm	Segmento de Reta [C, F] de Triângulo polígono2	$pm = 3,01$	SegmentodeReta[C, F, polígono2]	
15	Triângulo polígono3	Polígono M, G, C	polígono3 = 0.92	Polígono[M, G, C]	
15	Segmento de Reta $c_2$	Segmento de Reta [M, G] de Triângulo polígono3	$c_2 = 1,05$	SegmentodeReta[M, G, polígono3]	
15	Segmento de Reta $pm_1$	Segmento de Reta [G, C] de Triângulo polígono3	$pm_1 = 2,04$	SegmentodeReta[G, C, polígono3]	
15	Segmento de Reta g	Segmento de Reta [C, M] de Triângulo polígono3	$g = 1,75$	SegmentodeReta[C, M, polígono3]	
16	Quadrilátero polígono4	Polígono F, A, B, G	polígono4 = 9.19	Polígono[F, A, B, G]	
16	Segmento de Reta $f_2$	Segmento de Reta [F, A] de Quadrilátero polígono4	$f_2 = 3,01$	SegmentodeReta[F, A, polígono4]	
16	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [A, B] de Quadrilátero polígono4	$b = 7$	SegmentodeReta[A, B, polígono4]	
16	Segmento de Reta $b_1$	Segmento de Reta [B, G] de Quadrilátero polígono4	$b_1 = 2,04$	SegmentodeReta[B, G, polígono4]	
16	Segmento de Reta $g_1$	Segmento de Reta [G, F] de Quadrilátero polígono4	$g_1 = 3,5$	SegmentodeReta[G, F, polígono4]	
17	Número i		$i = 1$		
18	Ponto F'	Imagem de F na rotação de ângulo $(i \ 180)^\circ$	$F' = (2,45, 1,75)$	Rotação[F, $(i \ 180)^\circ$ , F]	
19	Ponto M'	Imagem de M na rotação de ângulo $(i \ 180)^\circ$	$M' = (0, 1,75)$	Rotação[M, $(i \ 180)^\circ$ , F]	
20	Ponto C'	Imagem de C na rotação de ângulo $(i \ 180)^\circ$	$C' = (0, 0)$	Rotação[C, $(i \ 180)^\circ$ , F]	
21	Triângulo polígono2'	Polígono F', M', C'	polígono2' = 2.14	Polígono[F', M', C']	
21	Segmento de Reta $c'$	Segmento de Reta [F', M'] de Triângulo polígono2'	$c' = 2,45$	SegmentodeReta[F', M', polígono2']	
21	Segmento de Reta f'	Segmento de Reta [M', C'] de Triângulo polígono2'	$f' = 1,75$	SegmentodeReta[M', C', polígono2']	
21	Segmento de Reta $pm'$	Segmento de Reta [C', F'] de Triângulo polígono2'	$pm' = 3,01$	SegmentodeReta[C', F', polígono2']	
22	Ponto $M'_1$	Imagem de M na rotação de ângulo $-(i \ 180)^\circ$	$M'_1 = (7, 1,75)$	Rotação[M, $-(i \ 180)^\circ$ , G]	
23	Ponto G'	Imagem de G na rotação de ângulo $-(i \ 180)^\circ$	$G' = (5,95, 1,75)$	Rotação[G, $-(i \ 180)^\circ$ , G]	
24	Ponto $C'_1$	Imagem de C na rotação de ângulo $-(i \ 180)^\circ$	$C'_1 = (7, 0)$	Rotação[C, $-(i \ 180)^\circ$ , G]	
25	Triângulo polígono3'	Polígono $M'_1$ , G', $C'_1$	polígono3' = 0.92	Polígono[M'_1, G', C'_1]	
25	Segmento de Reta $c'_1$	Segmento de Reta [ $M'_1$ , G'] de Triângulo polígono3'	$c'_1 = 1,05$	SegmentodeReta[M'_1, G', polígono3']	
25	Segmento de Reta $pm'_1$	Segmento de Reta [G', $C'_1$ ] de Triângulo polígono3'	$pm'_1 = 2,04$	SegmentodeReta[G', C'_1, polígono3']	
25	Segmento de Reta g'	Segmento de Reta [ $C'_1$ , $M'_1$ ] de Triângulo polígono3'	$g' = 1,75$	SegmentodeReta[C'_1, M'_1, polígono3']	
26	Texto texto1		Um outro olhar sobre a fórmula de cálculo da ár...		
27	Texto texto2		Observa o triângulo [ABC] (cujos ângulos adjac...		
28	Booleano j		$j = \text{true}$		1.
29	Texto texto3		Vamos desenhar a altura, relativa a [AB] (base)...		
30	Booleano k		$k = \text{true}$		2.
31	Texto texto4		Temos de marcar o ponto médio da altura (pont...		

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
32	Booleano l		$l = \text{true}$		3.
33	Texto texto5		"Depois vamos desenhar uma reta paralela à b..."		
34	Booleano m		$m = \text{true}$		4.
35	Texto texto6		"De seguida é simples assinalar os pontos da l..."		
36	Booleano n		$n = \text{true}$		5
37	Texto texto7		"Se olhares para o triângulo [ABC] percebes que..."		
38	Booleano o		$o = \text{true}$		6.
39	Texto texto8		"Vamos ver o que obténs se rodares o triângulo ..."		
40	Booleano p		$p = \text{true}$		7.
41	Botão botão1		botão1		Efetuar rotação
42	Botão botão2		botão2		Anular Rotação
43	Ponto l	Ponto em EixoX	$l = (7.3, 0)$	Ponto[EixoX]	
44	Ponto H		$H = (7.3, 1.75)$		
45	Segmento de Reta q	Segmento de Reta [H, l]	$q = 1.75$	SegmentodeReta[H, l]	
46	Texto texto9		$\frac{1}{2}bh$		
47	Texto texto10		"Obténs o retângulo [AMM_1B], com a mesma b..."		
48	Booleano r		$r = \text{true}$		8.
49	Texto texto11		$\text{Área [AMM_1B]} = \text{base} \times \text{altura} = b \times \frac{1}{2}h$		
50	Texto texto12		"Ficas a saber que a fórmula que permite calcula..."		
51	Texto texto13		$\frac{1}{2}bh$		
52	Booleano s		$s = \text{true}$		Então,
53	Texto texto14		"b"		
54	Botão botão3		botão3		Deslocar ponto C
55	Botão botão4		botão4		Parar
56	Botão botão5		botão5		Reiniciar
57	Texto texto15		"Atenção: Só podes prosseguir se tiveres efetua..."		
58	Texto texto16		"Vamos ver outra forma de ilustrar a fórmula do ..."		
59	Ponto J		$J = (-0.06, 8.04)$		
60	Ponto K		$K = (-0.37, 8.04)$		
61	Imagem imagem1		imagem1		
62	Texto texto17		"Área do triângulo"		
63	Texto texto18		"(unidades de área)"		



## 4.3. 2. Protocolo de construção

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Ponto em EixoX	$A = (1, 0)$	Ponto[EixoX]	
2	Ponto B		$B = (3, -1)$		
3	Ponto C		$C = (7, 1)$		
4	Triângulo polígono1	Polígono A, B, C	polígono1 = 4	Polígono[A, B, C]	
4	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [A, B] de Triângulo polígono1	$c = 2.24$	SegmentodeReta[A, B, polígono1]	
4	Segmento de Reta a	Segmento de Reta [B, C] de Triângulo polígono1	$a = 4.47$	SegmentodeReta[B, C, polígono1]	
4	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [C, A] de Triângulo polígono1	$b = 6.08$	SegmentodeReta[C, A, polígono1]	
5	Reta e	Reta que contém B e é perpendicular a b	$e: 6x + y = 17$	Perpendicular[B, b]	
6	Reta d	Reta que contém B e é perpendicular a e	$d: -x + 6y = -9$	Perpendicular[B, e]	
7	Texto texto1		"Outra explicação sobre como calcular a área do...		
8	Texto texto2		"Considera o triângulo [ABC] cujos ângulos adja...		
9	Texto texto3		"Vamos ver outra forma de ilustrar a fórmula do ...		
10	Booleano f		$f = \text{true}$		1.
11	Botão botão1		botão1		Efetuar a rotação
12	Número g		$g = 0.9$		
13	Ponto A'	Imagem de A na rotação de ângulo (g 170.54)°	$A' = (4.34, -2.79)$	Rotação[A, (g 170.54)°, B]	A
14	Ponto B'	Imagem de B na rotação de ângulo (g 170.54)°	$B' = (3, -1)$	Rotação[B, (g 170.54)°, B]	B
15	Ponto C'	Imagem de C na rotação de ângulo (g 170.54)°	$C' = (-1.47, -1)$	Rotação[C, (g 170.54)°, B]	C
16	Triângulo polígono1'	Polígono A', B', C'	polígono1' = 4	Polígono[A', B', C]	
16	Segmento de Reta c'	Segmento de Reta [A', B'] de Triângulo polígono1'	$c' = 2.24$	SegmentodeReta[A', B', polígono1']	
16	Segmento de Reta a'	Segmento de Reta [B', C'] de Triângulo polígono1'	$a' = 4.47$	SegmentodeReta[B', C', polígono1']	
16	Segmento de Reta b'	Segmento de Reta [C', A'] de Triângulo polígono1'	$b' = 6.08$	SegmentodeReta[C', A', polígono1']	
17	Booleano h <sub>1</sub>		$h_1 = \text{true}$		2.
18	Texto texto4		"De seguida vamos desenhar uma reta perpend...		
19	Reta i	Reta que contém B' e é perpendicular a b'	$i: -5.82x + 1.79y = -19.23$	Perpendicular[B', b]	
20	Ponto D	Pontos de Interseção de b', i	$D = (2.61, -2.26)$	Interseção[b', i]	
21	Booleano j		$j = \text{false}$		Esconder a reta perpendicular a [AC] que passa em B
22	Booleano k		$k = \text{true}$		3.
23	Texto texto5		"Partindo do triângulo [ABC] cujas medidas dos ...		
24	Segmento de Reta l	Segmento de Reta [B', D]	$l = 1.32$	SegmentodeReta[B', D]	h
25	Triângulo polígono2	Polígono C', D, B'	polígono2 = 2.81	Polígono[C', D, B]	
25	Segmento de Reta b' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [C', D] de Triângulo polígono2	$b'_1 = 4.27$	SegmentodeReta[C', D, polígono2]	
25	Segmento de Reta c' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [D, B'] de Triângulo polígono2	$c'_1 = 1.32$	SegmentodeReta[D, B', polígono2]	
25	Segmento de Reta d <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B', C'] de Triângulo polígono2	$d_1 = 4.47$	SegmentodeReta[B', C', polígono2]	
26	Triângulo polígono3	Polígono D, A', B'	polígono3 = 1.19	Polígono[D, A', B]	
26	Segmento de Reta b' <sub>2</sub>	Segmento de Reta [D, A'] de Triângulo polígono3	$b'_2 = 1.81$	SegmentodeReta[D, A', polígono3]	
26	Segmento de Reta d <sub>2</sub>	Segmento de Reta [A', B'] de Triângulo polígono3	$d_2 = 2.24$	SegmentodeReta[A', B', polígono3]	
26	Segmento de Reta a' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B', D] de Triângulo polígono3	$a'_1 = 1.32$	SegmentodeReta[B', D, polígono3]	
27	Booleano m		$m = \text{true}$		4.
28	Texto texto6		"O passo seguinte é determinar os pontos médi...		
29	Ponto N	Ponto Médio de C', B'	$N = (0.76, -1)$	PontoMédio[C', B]	
30	Ponto M	Ponto Médio de B', A'	$M = (3.67, -1.89)$	PontoMédio[B', A]	
31	Booleano n		$n = \text{true}$		5.
32	Texto texto7		"Vamos duplicar os triângulos e fazer uma rotaç...		
33	Número h		$h = 1$		
34	Ponto C''	Imagem de C' na rotação de ângulo (h 180)°	$C'' = (3, -1)$	Rotação[C', (h 180)°, N]	
35	Ponto D'	Imagem de D na rotação de ângulo (h 180)°	$D' = (-1.09, 0.25)$	Rotação[D, (h 180)°, N]	F
36	Ponto B''	Imagem de B' na rotação de ângulo (h 180)°	$B'' = (-1.47, -1)$	Rotação[B', (h 180)°, N]	
37	Triângulo polígono2'	Polígono C'', D', B''	polígono2' = 2.81	Polígono[C'', D', B]	
37	Segmento de Reta b''	Segmento de Reta [C'', D'] de Triângulo polígono2'	$b'' = 4.27$	SegmentodeReta[C'', D', polígono2']	
37	Segmento de Reta c''	Segmento de Reta [D', B''] de Triângulo polígono2'	$c'' = 1.32$	SegmentodeReta[D', B'', polígono2']	

Nº	Nome	Descrição	Valor	Comando	Legenda
37	Segmento de Reta d'	Segmento de Reta [B', C'] de Triângulo poligono2	d' = 4.47	SegmentodeReta[B', C', poligono2]	
38	Ponto D' <sub>1</sub>	Imagem de D na rotação de ângulo -(h 180)°	D' <sub>1</sub> = (4.73, -1.53)	Rotação[D, -(h 180)°, M]	E
39	Ponto A''	Imagem de A' na rotação de ângulo -(h 180)°	A'' = (3, -1)	Rotação[A', -(h 180)°, M]	
40	Ponto B'' <sub>1</sub>	Imagem de B' na rotação de ângulo -(h 180)°	B'' <sub>1</sub> = (4.34, -2.79)	Rotação[B', -(h 180)°, M]	
41	Triângulo poligono3	Polígono D' <sub>1</sub> , A'', B'' <sub>1</sub>	poligono3 = 1.19	Poligono[D' <sub>1</sub> , A'', B'' <sub>1</sub> ]	
41	Segmento de Reta b'' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [D' <sub>1</sub> , A''] de Triângulo poligono3	b'' <sub>1</sub> = 1.81	SegmentodeReta[D' <sub>1</sub> , A'', poligono3]	
41	Segmento de Reta d'' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A'', B'' <sub>1</sub> ] de Triângulo poligono3	d'' <sub>1</sub> = 2.24	SegmentodeReta[A'', B'' <sub>1</sub> , poligono3]	
41	Segmento de Reta a''	Segmento de Reta [B'' <sub>1</sub> , D' <sub>1</sub> ] de Triângulo poligono3	a'' = 1.32	SegmentodeReta[B'' <sub>1</sub> , D' <sub>1</sub> , poligono3]	
42	Botão botão2		botão2		Efetuar rotações
43	Botão botão3		botão3		Anular rotações
44	Texto texto8		*Nota: para prosseguir as rotações têm de es...		
45	Booleano o		o = true		6.
46	Texto texto9		*Obtém-se o retângulo [ACFE], cujas medidas d...		
47	Texto texto10		"=1frac{b\times h}{2}"		
48	Booleano p		p = true		7.
49	Texto texto11		* Podes movimentar o seletor abaixo (     ), p...		
50	Ponto E		E = (-3.9, 4.26)		
51	Ponto F		F = (-4.33, 4.26)		
52	Imagem imagem1		imagem1		
53	Ponto G		G = (-14.26, -5.34)		
54	Ponto H		H = (-13.53, -5.35)		
55	Imagem imagem2		imagem2		
56	Botão botão4		botão4		Reiniciar
57	Texto texto12		"Área do triângulo"		
58	Texto texto13		"(unidades de área)"		

## **5. Fórmula de cálculo da área do trapézio**

# 5.1. Área do trapézio

## 5.1.1. Ilustração *applet*

### Área do Trapézio

Esta construção pretende ilustrar a fórmula do cálculo da área do trapézio propriamente dito. Para avançares na animação tens de clicar nos quadrados (□).

- ☒ 1. Olha para o trapézio [AECD]. [EC] é a base menor cujo comprimento vamos chamar b e [AD] é a base maior cujo comprimento vamos chamar B.
- ☒ 2. Vamos começar por traçar uma perpendicular a [AD] que passe por E, assinalar o ponto de interseção desta reta com a base maior (ponto J) e de seguida representar a altura ([EJ]), cujo comprimento vamos chamar h.
- ☒ 3. Depois temos de assinalar o ponto médio da altura.
- ☒ 4. De seguida vamos representar uma reta paralela à base que passe pelo ponto médio (M). Feito isto, vamos assinalar os pontos de interseção da reta com [AE] e [CD].
- ☒ 5. Agora já és capaz de perceber que se pode decompor o trapézio em dois quadriláteros [AFGD] e [CEFG].
- ☒ 6. Se fizeres uma rotação de [CEFG], com centro em G e amplitude 180°, no sentido dos ponteiros do relógio, obténs um paralelogramo.

Efetuar rotação Anular rotação

Atenção: para prosseguires, a rotação tem de estar efetuada!

- ☒ 7. Vamos transformá-lo num retângulo. Para isso vamos desenhar uma reta que passe no ponto F e seja perpendicular à base maior. De seguida vamos assinalar o ponto de interseção dessa reta com a referida base (Ponto I).

- ☐ Mostrar reta perpendicular à base que passa por F ☒ Assinalar ponto I

- ☒ 8. Obténs o triângulo [AFI] e o quadrilátero [BFFI]. Se deslocares o triângulo n horizontal de forma a que o vértice A coincida com o ponto B, obténs-se um retângulo [FF'I'].

Efetuar a translação Anular translação

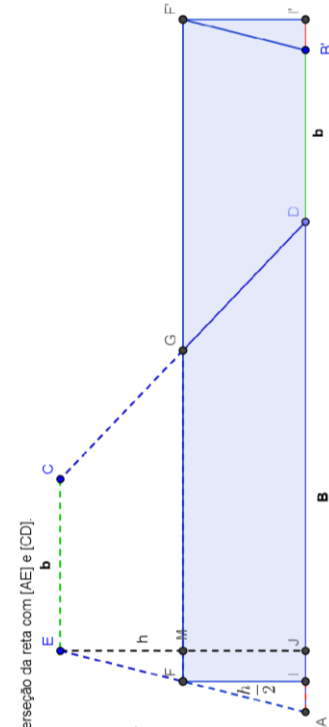
Atenção: para prosseguires, a translação tem de estar efetuada!

- ☒ 9. Repara que a medida do comprimento da base do retângulo é soma das medidas dos comprimentos das duas bases, ou seja, B+b (a base menor do trapézio [EC] corresponde a [B'B'] (ambos os segmentos de reta estão assinalados a verde) e [AI] corresponde a [B'I'] (ambos os segmentos de reta assinalados a vermelho)). A medida do comprimento da altura é  $\frac{h}{2}$ .

- ☒ Conclusão

Área do Trapézio =  $(B + b) \times \frac{h}{2} = \frac{B + b}{2} \times h$  (unidades de área)

Reiniciar





## 5.1. 2. Protocolo de construção

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)	Interseção[EixoX, EixoY]	
2	Ponto E		E = (1, 4)		
3	Ponto D	Ponto em EixoX	D = (8, 0)	Ponto[EixoX]	
4	Ponto C		C = (3,8, 4)		
5	Quadrilátero polígono1	Polígono A, E, C, D	polígono1 = 21.6	Polígono[A, E, C, D]	
5	Segmento de Reta a	Segmento de Reta [A, E] de Quadrilátero polígono1	a = 4.12	SegmentoDeReta[A, E, polígono1]	
5	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [E, C] de Quadrilátero polígono1	b = 2.8	SegmentoDeReta[E, C, polígono1]	
5	Segmento de Reta d	Segmento de Reta [C, D] de Quadrilátero polígono1	d = 5.8	SegmentoDeReta[C, D, polígono1]	
5	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [D, A] de Quadrilátero polígono1	c = 8	SegmentoDeReta[D, A, polígono1]	
6	Texto texto1		"Olha para o trapézio [AECD]. [EC] é a base men...		
7	Texto texto2		"Vamos começar por traçar uma perpendicular a...		
8	Reta e	Reta que contém E e é perpendicular a c	e: x = 1	Perpendicular[E, c]	
9	Ponto J	Pontos de Interseção de e, c	J = (1, 0)	Interseção[e, c]	
10	Segmento de Reta h	Segmento de Reta [E, J]	h = 4	SegmentoDeReta[E, J]	
11	Texto texto3		"Depois temos de assinalar o ponto médio da al...		
12	Ponto M	Ponto Médio de J, E	M = (1, 2)	PontoMédio[J, E]	
13	Texto texto4		"De seguida vamos representar uma reta parap...		
14	Reta f	Reta que contém M e é paralela a c	f: y = 2	Reta[M, c]	
15	Ponto F	Pontos de Interseção de f, a	F = (0,5, 2)	Interseção[f, a]	
16	Ponto G	Pontos de Interseção de f, d	G = (5,9, 2)	Interseção[f, d]	
17	Quadrilátero polígono2	Polígono F, G, C, E	polígono2 = 8.2	Polígono[F, G, C, E]	
17	Segmento de Reta f <sub>1</sub>	Segmento de Reta [F, G] de Quadrilátero polígono2	f <sub>1</sub> = 5.4	SegmentoDeReta[F, G, polígono2]	
17	Segmento de Reta g	Segmento de Reta [G, C] de Quadrilátero polígono2	g = 2.9	SegmentoDeReta[G, C, polígono2]	
17	Segmento de Reta c <sub>1</sub>	Segmento de Reta [C, E] de Quadrilátero polígono2	c <sub>1</sub> = 2.8	SegmentoDeReta[C, E, polígono2]	
17	Segmento de Reta b <sub>1</sub>	Segmento de Reta [E, F] de Quadrilátero polígono2	b <sub>1</sub> = 2.06	SegmentoDeReta[E, F, polígono2]	
18	Quadrilátero polígono3	Polígono A, D, G, F	polígono3 = 13.4	Polígono[A, D, G, F]	
18	Segmento de Reta a <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A, D] de Quadrilátero polígono3	a <sub>1</sub> = 8	SegmentoDeReta[A, D, polígono3]	
18	Segmento de Reta d <sub>1</sub>	Segmento de Reta [D, G] de Quadrilátero polígono3	d <sub>1</sub> = 2.9	SegmentoDeReta[D, G, polígono3]	
18	Segmento de Reta g <sub>1</sub>	Segmento de Reta [G, F] de Quadrilátero polígono3	g <sub>1</sub> = 5.4	SegmentoDeReta[G, F, polígono3]	
18	Segmento de Reta f <sub>2</sub>	Segmento de Reta [F, A] de Quadrilátero polígono3	f <sub>2</sub> = 2.06	SegmentoDeReta[F, A, polígono3]	
19	Texto texto5		"Agora já és capaz de perceber que se pode des...		
20	Texto texto6		"b"		
21	Texto texto7		"B"		
22	Texto texto8		"Se fizeres uma rotação de [CEFG], com centro e...		
23	Número i		i = 1		
24	Ponto F'	Imagem de F na rotação de ângulo -(180° i)	F' = (11,3, 2)	Rotação[F, -(180° i), G]	
25	Ponto G'	Imagem de G na rotação de ângulo -(180° i)	G' = (5,9, 2)	Rotação[G, -(180° i), G]	
26	Ponto C'	Imagem de C na rotação de ângulo -(180° i)	C' = (8, 0)	Rotação[C, -(180° i), G]	
27	Ponto B'	Imagem de E na rotação de ângulo -(180° i)	B' = (10,8, 0)	Rotação[E, -(180° i), G]	
28	Quadrilátero polígono2'	Polígono F', G', C', B'	polígono2' = 8.2	Polígono[F', G', C', B']	
28	Segmento de Reta f'	Segmento de Reta [F', G'] de Quadrilátero polígono2'	f' = 5.4	SegmentoDeReta[F', G', polígono2']	
28	Segmento de Reta g'	Segmento de Reta [G', C'] de Quadrilátero polígono2'	g' = 2.9	SegmentoDeReta[G', C', polígono2']	
28	Segmento de Reta c'	Segmento de Reta [C', B'] de Quadrilátero polígono2'	c' = 2.8	SegmentoDeReta[C', B', polígono2']	
28	Segmento de Reta b'	Segmento de Reta [B', F'] de Quadrilátero polígono2'	b' = 2.06	SegmentoDeReta[B', F', polígono2']	
29	Ponto H	Pontos de Interseção de f, EixoY	H = (0, 2)	Interseção[f, EixoY]	
30	Texto texto9		"\$frac{b}{2}\$"		
31	Texto texto6 <sub>1</sub>		"b"		
32	Texto texto10		"Obtém o triângulo [AFI] e o quadrilátero [BFFI]. ...		
33	Texto texto13		"=(B+b)*frac{b}{2}=frac{(B+b)}{2}*h"		
34	Texto texto14		"Área do Trapézio"		

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
35	Booleano k		k = true		1.
36	Booleano l		l = true		2.
37	Booleano m		m = false		reta perpendicular
38	Booleano n		n = true		Mostrar ponto J
39	Booleano o		o = true		Mostrar h
40	Booleano p		p = true		3.
41	Booleano q		q = true		4.
42	Booleano r		r = false		Mostrar reta paralela à base que passe por M
43	Booleano s		s = false		Pontos Médios de [AE] e [CD]
44	Booleano t		t = true		5.
45	Booleano u		u = true		6.
46	Botão botão1		botão1		Efetuar rotação
47	Botão botão2		botão2		Anular rotação
48	Booleano v		v = true		8.
49	Booleano w		w = true		9.
50	Botão botão3		botão3		Reiniciar
51	Texto texto12		*Atenção: para prosseguir, a rotação tem de e...		
52	Texto texto15		*Esta construção pretende ilustrar a fórmula do ...		
53	Reta e <sub>1</sub>	Reta que contém F e é perpendicular a a <sub>1</sub>	e <sub>1</sub> : x = 0,5	Perpendicular[F, a <sub>1</sub> ]	
54	Ponto l	Pontos de Interseção de e <sub>1</sub> , a <sub>1</sub>	l = (0,5, 0)	Intersect[e <sub>1</sub> , a <sub>1</sub> ]	
55	Triângulo polígono4	Polígono A, F, l	polígono4 = 0.5	Polígono[A, F, l]	
55	Segmento de Reta i <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A, F] de Triângulo polígono4	i <sub>1</sub> = 2.06	SegmentodeReta[A, F, polígono4]	
55	Segmento de Reta a <sub>2</sub>	Segmento de Reta [F, l] de Triângulo polígono4	a <sub>2</sub> = 2	SegmentodeReta[F, l, polígono4]	
55	Segmento de Reta f <sub>3</sub>	Segmento de Reta [l, A] de Triângulo polígono4	f <sub>3</sub> = 0.5	SegmentodeReta[l, A, polígono4]	
56	Texto texto16		*Vamos transformá-lo num retângulo. Para isso ...		
57	Quadrilátero polígono5	Polígono l, F, F', B'	polígono5 = 21.1	Polígono[l, F, F', B']	
57	Segmento de Reta i <sub>2</sub>	Segmento de Reta [l, F] de Quadrilátero polígono5	i <sub>2</sub> = 2	SegmentodeReta[l, F, polígono5]	
57	Segmento de Reta f <sub>4</sub>	Segmento de Reta [F, F'] de Quadrilátero polígono5	f <sub>4</sub> = 10.8	SegmentodeReta[F, F', polígono5]	
57	Segmento de Reta f <sub>1</sub>	Segmento de Reta [F', B'] de Quadrilátero polígono5	f <sub>1</sub> = 2.06	SegmentodeReta[F', B', polígono5]	
57	Segmento de Reta b' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B', l] de Quadrilátero polígono5	b' <sub>1</sub> = 10.3	SegmentodeReta[B', l, polígono5]	
58	Número z		z = 1		
59	Vetor u <sub>1</sub>	Vetor[A, B] z	u <sub>1</sub> = (10.8, 0)	Vetor[A, B] z	
60	Ponto A'	Translação de A por u <sub>1</sub>	A' = (10.8, 0)	Translação[A, u <sub>1</sub> ]	
61	Ponto F' <sub>1</sub>	Translação de F por u <sub>1</sub>	F' <sub>1</sub> = (11.3, 2)	Translação[F, u <sub>1</sub> ]	
62	Ponto l'	Translação de l por u <sub>1</sub>	l' = (11.3, 0)	Translação[l, u <sub>1</sub> ]	
63	Triângulo polígono4'	Polígono A', F' <sub>1</sub> , l'	polígono4' = 0.5	Polígono[A', F' <sub>1</sub> , l']	
63	Segmento de Reta i'	Segmento de Reta [A', F' <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono4'	i' = 2.06	SegmentodeReta[A', F' <sub>1</sub> , polígono4']	
63	Segmento de Reta a'	Segmento de Reta [F' <sub>1</sub> , l'] de Triângulo polígono4'	a' = 2	SegmentodeReta[F' <sub>1</sub> , l', polígono4']	
63	Segmento de Reta f' <sub>2</sub>	Segmento de Reta [l', A'] de Triângulo polígono4'	f' <sub>2</sub> = 0.5	SegmentodeReta[l', A', polígono4']	
64	Booleano j		j = false		Mostrar reta perpendicular à base que passa por F
65	Booleano h <sub>1</sub>		h <sub>1</sub> = true		Assinalar ponto l
66	Botão botão4		botão4		Efetuar translação
67	Botão botão5		botão5		Anular translação
68	Booleano j <sub>1</sub>		j <sub>1</sub> = true		7.
69	Texto texto11		"frac{h}{2}"		
70	Texto texto17		*Repara que a medida do comprimento da base...		
71	Booleano k <sub>1</sub>		k <sub>1</sub> = true		Conclusão
72	Texto texto12 <sub>1</sub>		*Atenção: para prosseguir, a translação tem d...		
73	Ponto B		B = (3.38, 7.36)		
74	Ponto K		K = (2.99, 7.36)		
75	Imagem imagem1		imagem1		
76	Texto texto18		"Área do Trapézio"		
77	Texto texto19		"(unidades de área)"		

5.2. O porquê da fórmula do cálculo da área do trapézio: outra visão

5.2.1. Ilustração *applet*

O porquê da fórmula de cálculo da área Trapézio: outra visão!

Esta animação é outra forma de ilustrar a fórmula que permite calcular a área do trapézio propriamente dito, para isso vamos transformar o trapézio num retângulo. Para prosseguires com a animação tens de clicar nos quadrados (□).

- ☒ 1. Considera o trapézio [AICD]. [IC] é a base menor (cuja medida de comprimento é b), [AD] é a base maior (cuja medida de comprimento é B) e a altura cuja medida de comprimento é h.
- ☒ 2. Vamos começar por determinar o ponto médio de [AI],  $M_1$ , e o ponto médio de [CD],  $M_2$ .
- ☒ 3. Depois podemos traçar uma perpendicular a [AD] que passe por  $M_1$  e outra que passe por  $M_2$  para encontrar os pontos de interseção de cada uma dessas retas com [AD] (G e H respetivamente).

☐ Mostrar perpendiculares ☒ Ponto G ☒ Ponto H

- ☒ 4. Agora é simples decompor o trapézio [AICD] em dois triângulos [AM<sub>1</sub>G] e [DHM<sub>2</sub>] e um hexágono [M<sub>1</sub>ICM<sub>2</sub>HG].

- ☒ 5. Podes rodar o triângulo [AM<sub>1</sub>G] com centro em  $M_1$  e amplitude -180° (180° no sentido dos ponteiros do relógio) e rodar o triângulo [DHM<sub>2</sub>] com centro  $M_2$  e amplitude 180°.

- ☒ 6. Obtemos um retângulo ([GG'HH']), cuja fórmula de cálculo da área é:

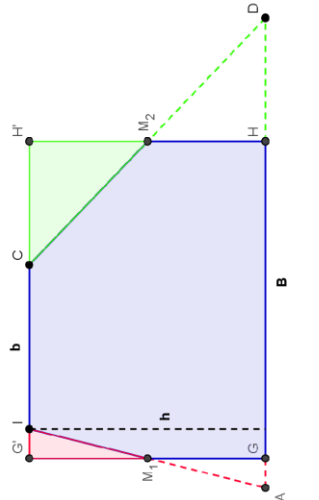
$$Área_{retângulo} = base \times altura$$

- ☒ 7. Repara que a soma das medidas dos comprimentos dos lados maiores do retângulo que obtiveste é (B+b) ([AG] é geometricamente igual a [G'I] (ambos os segmentos de reta assinalados a vermelho) e [HD] é geometricamente igual a [CH'] (ambos os segmentos de reta estão assinalados a verde)), então a medida da base do retângulo é dada por  $\frac{B+b}{2}$

(metade da soma das medidas dos comprimentos das bases do trapézio), a medida do comprimento da altura é h

☒ Conclusão:

$$Área \text{ do Trapézio} = \frac{(B+b)}{2} \times h \quad (\text{unidades de área})$$



## 5.2. 2. Protocolo de construção

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)	Intersectar[EixoX, EixoY]	
2	Ponto I		I = (1, 4)		
3	Ponto D	Ponto em EixoX	D = (8, 0)	Ponto[EixoX]	
4	Ponto C		C = (3,8, 4)		
5	Quadrilátero polígono1	Polígono A, I, C, D	polígono1 = 21.6	Polígono[A, I, C, D]	
5	Segmento de Reta a	Segmento de Reta [A, I] de Quadrilátero polígono1	a = 4.12	SegmentodeReta[A, I, polígono1]	
5	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [I, C] de Quadrilátero polígono1	b = 2.8	SegmentodeReta[I, C, polígono1]	
5	Segmento de Reta d	Segmento de Reta [C, D] de Quadrilátero polígono1	d = 5.8	SegmentodeReta[C, D, polígono1]	
5	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [D, A] de Quadrilátero polígono1	c = 8	SegmentodeReta[D, A, polígono1]	
6	Texto texto1		"Considera o trapézio [AICD]. [IC] é a base meno...		
7	Texto texto2		"Depois podemos traçar uma perpendicular a [A...		
8	Texto texto6		"b"		
9	Texto texto7		"B"		
10	Texto texto8		"Podes rodar o triângulo [AM <sub>1</sub> IG], com centro e...		
11	Texto texto10		"Obtemos um retângulo ((GGHfH)), cuja fórmula ...		
12	Texto texto11		"\$ Área_(retângulo)=base×altura \$"		
13	Texto texto13		"=frac{(B+b)}{2}×h"		
14	Texto texto14		"O porquê da fórmula de cálculo da área Trapézi...		
15	Botão botão1		botão1		Efetuar rotação
16	Botão botão2		botão2		Anular rotação
17	Botão botão3		botão3		Reiniciar
18	Texto texto12		"Nota: para prosseguir a rotação tem de estar ef...		
19	Ponto M <sub>1</sub>	Ponto Médio de I, A	M <sub>1</sub> = (0.5, 2)	PontoMédio[I, A]	
20	Ponto M <sub>2</sub>	Ponto Médio de C, D	M <sub>2</sub> = (5.8, 2)	PontoMédio[C, D]	
21	Reta f	Reta que contém M <sub>1</sub> e é perpendicular a c	f: x = 0.5	Perpendicular[M <sub>1</sub> , c]	
22	Reta g	Reta que contém M <sub>2</sub> e é perpendicular a c	g: x = 5.8	Perpendicular[M <sub>2</sub> , c]	
23	Ponto G	Pontos de Interseção de f, c	G = (0.5, 0)	Intersectar[f, c]	
24	Triângulo polígono2	Polígono M <sub>1</sub> , A, G	polígono2 = 0.5	Polígono[M <sub>1</sub> , A, G]	
24	Segmento de Reta g <sub>1</sub>	Segmento de Reta [M <sub>1</sub> , A] de Triângulo polígono2	g <sub>1</sub> = 2.08	SegmentodeReta[M <sub>1</sub> , A, polígono2]	
24	Segmento de Reta e <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A, G] de Triângulo polígono2	e <sub>1</sub> = 0.5	SegmentodeReta[A, G, polígono2]	
24	Segmento de Reta a <sub>1</sub>	Segmento de Reta [G, M <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono2	a <sub>1</sub> = 2	SegmentodeReta[G, M <sub>1</sub> , polígono2]	
25	Ponto H	Pontos de Interseção de g, c	H = (5.8, 0)	Intersectar[g, c]	
26	Triângulo polígono3	Polígono M <sub>2</sub> , H, D	polígono3 = 2.1	Polígono[M <sub>2</sub> , H, D]	
26	Segmento de Reta d <sub>1</sub>	Segmento de Reta [M <sub>2</sub> , H] de Triângulo polígono3	d <sub>1</sub> = 2	SegmentodeReta[M <sub>2</sub> , H, polígono3]	
26	Segmento de Reta f <sub>1</sub>	Segmento de Reta [H, D] de Triângulo polígono3	f <sub>1</sub> = 2.1	SegmentodeReta[H, D, polígono3]	
26	Segmento de Reta h	Segmento de Reta [D, M <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono3	h = 2.9	SegmentodeReta[D, M <sub>2</sub> , polígono3]	
27	Hexágono polígono4	Polígono H, M <sub>2</sub> , C, I, M <sub>1</sub> , G	polígono4 = 19	Polígono[H, M <sub>2</sub> , C, I, M <sub>1</sub> , G]	
27	Segmento de Reta h <sub>1</sub>	Segmento de Reta [H, M <sub>2</sub> ] de Hexágono polígono4	h <sub>1</sub> = 2	SegmentodeReta[H, M <sub>2</sub> , polígono4]	
27	Segmento de Reta f <sub>2</sub>	Segmento de Reta [M <sub>2</sub> , C] de Hexágono polígono4	f <sub>2</sub> = 2.9	SegmentodeReta[M <sub>2</sub> , C, polígono4]	
27	Segmento de Reta c <sub>1</sub>	Segmento de Reta [C, I] de Hexágono polígono4	c <sub>1</sub> = 2.8	SegmentodeReta[C, I, polígono4]	
27	Segmento de Reta b <sub>1</sub>	Segmento de Reta [I, M <sub>1</sub> ] de Hexágono polígono4	b <sub>1</sub> = 2.08	SegmentodeReta[I, M <sub>1</sub> , polígono4]	
27	Segmento de Reta e <sub>2</sub>	Segmento de Reta [M <sub>1</sub> , G] de Hexágono polígono4	e <sub>2</sub> = 2	SegmentodeReta[M <sub>1</sub> , G, polígono4]	
27	Segmento de Reta g <sub>2</sub>	Segmento de Reta [G, H] de Hexágono polígono4	g <sub>2</sub> = 5.4	SegmentodeReta[G, H, polígono4]	
28	Número i		i = 1		
29	Ponto E'	Imagem de M <sub>1</sub> na rotação de ângulo -(180° i)	E' = (0.5, 2)	Rotação[M <sub>1</sub> , -(180° i), M <sub>1</sub> ]	
30	Ponto G'	Imagem de G na rotação de ângulo -(180° i)	G' = (0.5, 4)	Rotação[G, -(180° i), M <sub>1</sub> ]	
31	Segmento de Reta j	Segmento de Reta [E', G']	j = 2	SegmentodeReta[E', G']	
32	Ponto E' <sub>1</sub>	Imagem de M <sub>1</sub> na rotação de ângulo -(180° i)	E' <sub>1</sub> = (0.5, 2)	Rotação[M <sub>1</sub> , -(180° i), M <sub>1</sub> ]	
33	Ponto A'	Imagem de A na rotação de ângulo -(180° i)	A' = (1, 4)	Rotação[A, -(180° i), M <sub>1</sub> ]	

Id	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
34	Ponto $G_1$	Imagem de G na rotação de ângulo $-(180^\circ i)$	$G_1 = (0.5, 4)$	Rotação(G, $-(180^\circ i)$ , $M_1$ )	
35	Triângulo polígono2	Polígono $E_1, A', G_1$	polígono2 = 0.5	Polígono( $E_1, A', G_1$ )	
36	Segmento de Reta $g_1$	Segmento de Reta $[E_1, A']$ de Triângulo polígono2	$g_1 = 2.08$	SegmentodeReta( $E_1, A',$ polígono2)	
37	Segmento de Reta $e_1$	Segmento de Reta $[A', G_1]$ de Triângulo polígono2	$e_1 = 0.5$	SegmentodeReta( $A', G_1,$ polígono2)	
38	Segmento de Reta $a'$	Segmento de Reta $[G_1, E_1]$ de Triângulo polígono2	$a' = 2$	SegmentodeReta( $G_1, E_1,$ polígono2)	
39	Ponto F	Imagem de $M_2$ na rotação de ângulo $180^\circ i$	$F = (5.9, 2)$	Rotação( $M_2, 180^\circ i, M_2$ )	
40	Ponto H	Imagem de H na rotação de ângulo $180^\circ i$	$H = (5.9, 4)$	Rotação(H, $180^\circ i, M_2$ )	
41	Ponto D'	Imagem de D na rotação de ângulo $180^\circ i$	$D' = (3.8, 4)$	Rotação(D, $180^\circ i, M_2$ )	
42	Triângulo polígono3	Polígono F, H, D'	polígono3 = 2.1	Polígono(F, H, D')	
43	Segmento de Reta d'	Segmento de Reta $[F, H]$ de Triângulo polígono3	$d' = 2$	SegmentodeReta(F, H, polígono3)	
44	Segmento de Reta f	Segmento de Reta $[H, D']$ de Triângulo polígono3	$f = 2.1$	SegmentodeReta(H, D', polígono3)	
45	Segmento de Reta h'	Segmento de Reta $[D', F]$ de Triângulo polígono3	$h' = 2.9$	SegmentodeReta(D', F, polígono3)	
46	Texto texto15		"Vamos começar por determinar o ponto médio ..."		
47	Texto texto3		"Agora é simples decompor o trapézio [AICD] e..."		
48	Ponto E		$E = (1, 0)$		
49	Segmento de Reta k	Segmento de Reta $[I, E]$	$k = 4$	SegmentodeReta(I, E)	
50	Texto texto4		"h"		
51	Texto texto5		"Repara que a soma das medidas dos comprime..."		
52	Texto texto9		$\$ \frac{1}{2} (B+b) (2) \$$		
53	Texto texto16		"(metade da soma das medidas dos comprime..."		
54	Booleano l		$l = \text{true}$		1.
55	Booleano m		$m = \text{true}$		2.
56	Booleano e		$e = \text{true}$		3.
57	Booleano n		$n = \text{false}$		Mostrar perpendiculares
58	Booleano o		$o = \text{true}$		Ponto G
59	Booleano p		$p = \text{true}$		Ponto H
60	Booleano q		$q = \text{true}$		4.
61	Booleano r		$r = \text{true}$		5.
62	Booleano s		$s = \text{true}$		6.
63	Booleano t		$t = \text{true}$		7.
64	Booleano u		$u = \text{true}$		Conclusão:
65	Texto texto17		"Esta animação é outra forma de ilustrar a fórmu..."		
66	Ponto B		$B = (11.28, 7.38)$		
67	Ponto F		$F = (10.95, 7.38)$		
68	Imagem imagem1		imagem1		
69	Texto texto18		"Área do Trapézio"		
70	Texto texto19		"(unidades de área)"		



## 6.2. Protocolo de construção

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Ponto em EixoX	$A = (-2,74, 0)$	Ponto[EixoX]	
2	Ponto B	Ponto em EixoY	$B = (0, 2)$	Ponto[EixoY]	
3	Ponto C	Ponto em EixoY	$C = (0, -2)$	Ponto[EixoY]	
4	Ponto $D_1$	Ponto em EixoX	$D_1 = (8, 0)$	Ponto[EixoX]	
5	Quadrilátero polígono1	Polígono A, B, $D_1$ , C	polígono1 = 17,48	Polígono[A, B, $D_1$ , C]	
5	Segmento de Reta a	Segmento de Reta [A, B] de Quadrilátero polígono1	$a = 3,39$	SegmentodeReta[A, B, polígono1]	
5	Segmento de Reta b	Segmento de Reta [B, $D_1$ ] de Quadrilátero polígono1	$b = 6,32$	SegmentodeReta[B, $D_1$ , polígono1]	
5	Segmento de Reta $d_1$	Segmento de Reta [ $D_1$ , C] de Quadrilátero polígono1	$d_1 = 6,32$	SegmentodeReta[ $D_1$ , C, polígono1]	
5	Segmento de Reta c	Segmento de Reta [C, A] de Quadrilátero polígono1	$c = 3,39$	SegmentodeReta[C, A, polígono1]	
6	Segmento de Reta d	Segmento de Reta [B, C]	$d = 4$	SegmentodeReta[B, C]	
7	Segmento de Reta f	Segmento de Reta [A, $D_1$ ]	$f = 8,74$	SegmentodeReta[A, $D_1$ ]	
8	Ponto E	Pontos de Interseção de d, f	$E = (0, 0)$	Interseção[d, f]	
9	Triângulo polígono2	Polígono A, E, C	polígono2 = 2,74	Polígono[A, E, C]	
9	Segmento de Reta $c_1$	Segmento de Reta [A, E] de Triângulo polígono2	$c_1 = 2,74$	SegmentodeReta[A, E, polígono2]	
9	Segmento de Reta $a_1$	Segmento de Reta [E, C] de Triângulo polígono2	$a_1 = 2$	SegmentodeReta[E, C, polígono2]	
9	Segmento de Reta $e_1$	Segmento de Reta [C, A] de Triângulo polígono2	$e_1 = 3,39$	SegmentodeReta[C, A, polígono2]	
10	Triângulo polígono3	Polígono E, C, $D_1$	polígono3 = 6	Polígono[E, C, $D_1$ ]	
10	Segmento de Reta $d_1$	Segmento de Reta [E, C] de Triângulo polígono3	$d_1 = 2$	SegmentodeReta[E, C, polígono3]	
10	Segmento de Reta $e_2$	Segmento de Reta [C, $D_1$ ] de Triângulo polígono3	$e_2 = 6,32$	SegmentodeReta[C, $D_1$ , polígono3]	
10	Segmento de Reta $c_2$	Segmento de Reta [ $D_1$ , E] de Triângulo polígono3	$c_2 = 6$	SegmentodeReta[ $D_1$ , E, polígono3]	
11	Triângulo polígono4	Polígono A, B, $D_1$	polígono4 = 8,74	Polígono[A, B, $D_1$ ]	
11	Segmento de Reta $d_2$	Segmento de Reta [A, B] de Triângulo polígono4	$d_2 = 3,39$	SegmentodeReta[A, B, polígono4]	
11	Segmento de Reta $a_2$	Segmento de Reta [B, $D_1$ ] de Triângulo polígono4	$a_2 = 6,32$	SegmentodeReta[B, $D_1$ , polígono4]	
11	Segmento de Reta $b_1$	Segmento de Reta [ $D_1$ , A] de Triângulo polígono4	$b_1 = 8,74$	SegmentodeReta[ $D_1$ , A, polígono4]	
12	Número g		$g = 1$		
13	Reta r	Reta que contém A e é perpendicular a EixoX	$r: x = -2,74$	Perpendicular[A, EixoX]	
14	Reta s	Reta que contém $D_1$ e é perpendicular a EixoX	$s: x = 8$	Perpendicular[ $D_1$ , EixoX]	
15	Ponto A'	A refletido a r	$A' = (-2,74, 0)$	Reflexão[A, r]	
16	Ponto E'	E refletido a r	$E' = (-5,48, 0)$	Reflexão[E, r]	
17	Ponto C'	C refletido a r	$C' = (-5,48, -2)$	Reflexão[C, r]	
18	Triângulo polígono2'	Polígono A', E', C'	polígono2' = 2,74	Polígono[A', E', C']	
18	Segmento de Reta $c'$	Segmento de Reta [A', E'] de Triângulo polígono2'	$c' = 2,74$	SegmentodeReta[A', E', polígono2']	
18	Segmento de Reta $a'$	Segmento de Reta [E', C'] de Triângulo polígono2'	$a' = 2$	SegmentodeReta[E', C', polígono2']	
18	Segmento de Reta $e'$	Segmento de Reta [C', A'] de Triângulo polígono2'	$e' = 3,39$	SegmentodeReta[C', A', polígono2']	
19	Ponto E' <sub>1</sub>	E' refletido a s	$E'_1 = (12, 0)$	Reflexão[E', s]	
20	Ponto C' <sub>1</sub>	C' refletido a s	$C'_1 = (12, -2)$	Reflexão[C', s]	
21	Ponto D'	$D_1$ refletido a s	$D' = (8, 0)$	Reflexão[ $D_1$ , s]	
22	Triângulo polígono3'	Polígono E' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> , D'	polígono3' = 6	Polígono[E' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> , D']	
22	Segmento de Reta $d'$	Segmento de Reta [E' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono3'	$d' = 2$	SegmentodeReta[E' <sub>1</sub> , C' <sub>1</sub> , polígono3']	
22	Segmento de Reta $e'_1$	Segmento de Reta [C' <sub>1</sub> , D'] de Triângulo polígono3'	$e'_1 = 6,32$	SegmentodeReta[C' <sub>1</sub> , D', polígono3']	
22	Segmento de Reta $c'_1$	Segmento de Reta [D', E' <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono3'	$c'_1 = 6$	SegmentodeReta[D', E' <sub>1</sub> , polígono3']	
23	Vetor u	Vetor[A, B]	$u = (2,74, 2)$	Vetor[A, B]	
24	Vetor v	Vetor[ $D_1$ , B]	$v = (-8, 2)$	Vetor[ $D_1$ , B]	
25	Ponto A''	Translação de A' por u g	$A'' = (0, 2)$	Translação[A', Vetor[u g]]	
26	Ponto G	Translação de E' por u g	$G = (-2,74, 2)$	Translação[E', Vetor[u g]]	
27	Ponto C''	Translação de C' por u g	$C'' = (-2,74, 0)$	Translação[C', Vetor[u g]]	
28	Triângulo polígono2''	Polígono A'', G, C''	polígono2'' = 2,74	Polígono[A'', G, C'']	
28	Segmento de Reta $c''$	Segmento de Reta [A'', G] de Triângulo polígono2''	$c'' = 2,74$	SegmentodeReta[A'', G, polígono2'']	
28	Segmento de Reta $a''$	Segmento de Reta [G, C''] de Triângulo polígono2''	$a'' = 2$	SegmentodeReta[G, C'', polígono2'']	

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
28	Segmento de Reta $e'$	Segmento de Reta $[C', A']$ de Triângulo polígono2	$e' = 3.39$	SegmentodeReta( $C'$ , $A'$ , polígono2)	
29	Ponto F	Translação de $E'$ por $v_g$	$F = (8, 2)$	Translação( $E'$ , Vetor( $v_g$ ))	
30	Ponto $G_1$	Translação de $C'$ por $v_g$	$G_1 = (8, 0)$	Translação( $C'$ , Vetor( $v_g$ ))	
31	Ponto $D''$	Translação de $D'$ por $v_g$	$D'' = (0, 2)$	Translação( $D'$ , Vetor( $v_g$ ))	
32	Triângulo polígono3	Polígono $F, G_1, D''$	polígono3 = 6	Polígono( $F, G_1, D''$ )	
32	Segmento de Reta $d''$	Segmento de Reta $[F, G_1]$ de Triângulo polígono3	$d'' = 2$	SegmentodeReta( $F, G_1$ , polígono3)	
32	Segmento de Reta $f_1$	Segmento de Reta $[G_1, D'']$ de Triângulo polígono3	$f_1 = 6.32$	SegmentodeReta( $G_1, D''$ , polígono3)	
32	Segmento de Reta $g_1$	Segmento de Reta $[D'', F]$ de Triângulo polígono3	$g_1 = 6$	SegmentodeReta( $D'', F$ , polígono3)	
33	Texto texto1		"Área do papagaio"		
34	Texto texto2		"Considera o papagaio [ABD_1C]. A diagonal m...		
35	Segmento de Reta D	Segmento de Reta $[A, D_1]$	$D = 8.74$	SegmentodeReta( $A, D_1$ )	
36	Booleano e		$e = \text{true}$		1.
37	Booleano k		$k = \text{true}$		Mostrar D
38	Booleano l		$l = \text{true}$		Mostrar d
39	Texto texto3		"Podemos decompor o papagaio em quatro tria...		
40	Booleano m		$m = \text{true}$		2.
41	Booleano n		$n = \text{true}$		Mostrar E
42	Texto texto4		"De seguida desenhamos duas retas perpendic...		
43	Booleano j		$j = \text{true}$		3.
44	Texto texto5		"Fazer uma reflexão do triângulo verde claro [AE...		
45	Booleano h		$h = \text{true}$		4.
46	Texto texto6		"Agora vamos efetuar uma translação da image...		
47	Botão botão1		botão1		Efetuar translação
48	Botão botão2		botão2		Anular translação
49	Triângulo polígono5	Polígono $A, C, E$	polígono5 = 2.74	Polígono( $A, C, E$ )	
49	Segmento de Reta $e_3$	Segmento de Reta $[A, C]$ de Triângulo polígono5	$e_3 = 3.39$	SegmentodeReta( $A, C$ , polígono5)	
49	Segmento de Reta $a_3$	Segmento de Reta $[C, E]$ de Triângulo polígono5	$a_3 = 2$	SegmentodeReta( $C, E$ , polígono5)	
49	Segmento de Reta $c_3$	Segmento de Reta $[E, A]$ de Triângulo polígono5	$c_3 = 2.74$	SegmentodeReta( $E, A$ , polígono5)	
50	Triângulo polígono6	Polígono $C, E, D_1$	polígono6 = 6	Polígono( $C, E, D_1$ )	
50	Segmento de Reta $d_4$	Segmento de Reta $[C, E]$ de Triângulo polígono6	$d_4 = 2$	SegmentodeReta( $C, E$ , polígono6)	
50	Segmento de Reta $c_4$	Segmento de Reta $[E, D_1]$ de Triângulo polígono6	$c_4 = 6$	SegmentodeReta( $E, D_1$ , polígono6)	
50	Segmento de Reta $e_4$	Segmento de Reta $[D_1, C]$ de Triângulo polígono6	$e_4 = 6.32$	SegmentodeReta( $D_1, C$ , polígono6)	
51	Texto texto7		" $\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{2}$ "		
52	Booleano i		$i = \text{true}$		5.
53	Texto texto8		"Obtém-se um retângulo [AGFD_1], cujas medid...		
54	Texto texto9		" $\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{2}$ "		
55	Texto texto10		"Área_(retângulo)= $D \times \frac{1}{2}$ "		
56	Booleano o		$o = \text{true}$		6.
57	Booleano p		$p = \text{true}$		Conclusão:
58	Texto texto11		"Nota: para poderes prosseguir a translação te...		
59	Botão botão3		botão3		Reiniciar
60	Número q		$q = 1$		
61	Ponto H	$E' - q \cdot A$	$H = (-2.74, 0)$	$E' - q \cdot A$	
62	Ponto I	$E + q \cdot A$	$I = (-2.74, 0)$	$E + q \cdot A$	
63	Reta t	Reta que contém H e é paralela a $a'$	$t \cdot x = -2.74$	Reta( $H, a'$ )	
64	Ponto J	Pontos de Interseção de $t, e'$	$J = (-2.74, 0)$	Intersectar( $t, e'$ )	
65	Quadrilátero polígono7	Polígono $E', H, J, C'$	polígono7 = 2.74	Polígono( $E', H, J, C'$ )	
65	Segmento de Reta $e'_2$	Segmento de Reta $[E', H]$ de Quadrilátero polígono7	$e'_2 = 2.74$	SegmentodeReta( $E', H$ , polígono7)	
65	Segmento de Reta $h_1$	Segmento de Reta $[H, J]$ de Quadrilátero polígono7	$h_1 = 0$	SegmentodeReta( $H, J$ , polígono7)	



Nº	Nome	Descrição	Valor	Comando	Legenda
65	Segmento de Reta $j_1$	Segmento de Reta $[J, C]$ de Quadrilátero polígono7	$j_1 = 3.39$	SegmentodeReta(J, C, polígono7)	
66	Segmento de Reta $c'_2$	Segmento de Reta $[C', E]$ de Quadrilátero polígono7	$c'_2 = 2$	SegmentodeReta(C', E, polígono7)	
66	Reta $l_1$	Reta que contém I e é paralela a $a_1$	$l_1: x = -2.74$	Reta(I, $a_1$ )	
67	Ponto K	Pontos de Interseção de $l_1, c$	$K = (-2.74, 0)$	Interseção( $l_1, c$ )	
68	Triângulo polígono8	Polígono A, I, K	polígono8 = 0	Polígono(A, I, K)	
68	Segmento de Reta $k_1$	Segmento de Reta $[A, I]$ de Triângulo polígono8	$k_1 = 0$	SegmentodeReta(A, I, polígono8)	
68	Segmento de Reta $a_4$	Segmento de Reta $[I, K]$ de Triângulo polígono8	$a_4 = 0$	SegmentodeReta(I, K, polígono8)	
68	Segmento de Reta $i_2$	Segmento de Reta $[K, A]$ de Triângulo polígono8	$i_2 = 0$	SegmentodeReta(K, A, polígono8)	
69	Ponto L	Ponto(f) $d_1$	$L = (0, 0)$	Ponto(f) $d_1$	
70	Ponto M	$E + q D_1$	$M = (6, 0)$	$E + q D_1$	
71	Ponto N	$E'_1 - q D_1$	$N = (6, 0)$	$E'_1 - q D_1$	
72	Reta $l_1$	Reta que contém M e é paralela a $a_1$	$l_1: x = 6$	Reta(M, $a_1$ )	
73	Ponto O	Pontos de Interseção de $l_1, d_3$	$O = (6, 0)$	Interseção( $l_1, d_3$ )	
74	Triângulo polígono9	Polígono M, O, $D_1$	polígono9 = 0	Polígono(M, O, $D_1$ )	
74	Segmento de Reta $d_5$	Segmento de Reta $[M, O]$ de Triângulo polígono9	$d_5 = 0$	SegmentodeReta(M, O, polígono9)	
74	Segmento de Reta $m_1$	Segmento de Reta $[O, D_1]$ de Triângulo polígono9	$m_1 = 0$	SegmentodeReta(O, $D_1$ , polígono9)	
74	Segmento de Reta $o_1$	Segmento de Reta $[D_1, M]$ de Triângulo polígono9	$o_1 = 0$	SegmentodeReta( $D_1, M$ , polígono9)	
75	Reta $n_1$	Reta que contém N e é paralela a $d'$	$n_1: x = 6$	Reta(N, $d'$ )	
76	Ponto P	Pontos de Interseção de $n_1, e'_1$	$P = (6, 0)$	Interseção( $n_1, e'_1$ )	
77	Quadrilátero polígono10	Polígono N, $E'_1, C'_1, P$	polígono10 = 6	Polígono(N, $E'_1, C'_1, P$ )	
77	Segmento de Reta $n_2$	Segmento de Reta $[N, E'_1]$ de Quadrilátero polígono10	$n_2 = 6$	SegmentodeReta(N, $E'_1$ , polígono10)	
77	Segmento de Reta $e'_3$	Segmento de Reta $[E'_1, C'_1]$ de Quadrilátero polígono10	$e'_3 = 2$	SegmentodeReta( $E'_1, C'_1$ , polígono10)	
77	Segmento de Reta $c'_3$	Segmento de Reta $[C'_1, P]$ de Quadrilátero polígono10	$c'_3 = 6.32$	SegmentodeReta( $C'_1, P$ , polígono10)	
77	Segmento de Reta $p_1$	Segmento de Reta $[P, N]$ de Quadrilátero polígono10	$p_1 = 0$	SegmentodeReta(P, N, polígono10)	
78	Botão botão4		botão4		Fazer reflexão
79	Botão botão5		botão5		Anular reflexão
80	Texto texto11		*Nota: para poderes prosseguir, a reflexão tem d...		
81	Segmento de Reta $q_1$	Segmento de Reta $[B, L]$	$q_1 = 2$	SegmentodeReta(B, L)	
82	Texto texto12		*Esta construção pretende ilustrar a fórmula de ...		
83	Ponto Q		$Q = (0.58, 6.3)$		
84	Ponto R		$R = (0.16, 6.28)$		
85	Imagem imagem1		imagem1		
86	Triângulo polígono11	Polígono A, E, B	polígono11 = 2.74	Polígono(A, E, B)	
86	Segmento de Reta $b_2$	Segmento de Reta $[A, E]$ de Triângulo polígono11	$b_2 = 2.74$	SegmentodeReta(A, E, polígono11)	
86	Segmento de Reta $a_5$	Segmento de Reta $[E, B]$ de Triângulo polígono11	$a_5 = 2$	SegmentodeReta(E, B, polígono11)	
86	Segmento de Reta $e_5$	Segmento de Reta $[B, A]$ de Triângulo polígono11	$e_5 = 3.39$	SegmentodeReta(B, A, polígono11)	
87	Triângulo polígono12	Polígono B, E, $D_1$	polígono12 = 6	Polígono(B, E, $D_1$ )	
87	Segmento de Reta $d_6$	Segmento de Reta $[B, E]$ de Triângulo polígono12	$d_6 = 2$	SegmentodeReta(B, E, polígono12)	
87	Segmento de Reta $b_3$	Segmento de Reta $[E, D_1]$ de Triângulo polígono12	$b_3 = 6$	SegmentodeReta(E, $D_1$ , polígono12)	
87	Segmento de Reta $e_6$	Segmento de Reta $[D_1, B]$ de Triângulo polígono12	$e_6 = 6.32$	SegmentodeReta( $D_1, B$ , polígono12)	
88	Texto texto13		*Como a área do retângulo é dada por $\text{Área} = \text{ba}...$		
89	Texto texto14		$= \frac{1}{2} \text{D} \times \text{d} [2]$		
90	Texto texto15		*Área do papagaio		
91	Texto texto16		*Nota: O losango é um caso particular do papag...		
92	Texto texto17		*[unidades de área]		

## 7. Fórmula de cálculo da área do círculo

### 7.1. Ilustração *applet*

#### Porque é que a fórmula do cálculo da área do círculo é $\pi r^2$ ?

Esta construção pretende ilustrar a fórmula para o cálculo da área do círculo. Vamos decompor o círculo em setores circulares e aproximar a área de cada setor circular pela área de um triângulo. A soma das áreas dos triângulos irá dar uma aproximação da área do círculo e se aumentarmos cada vez mais o número de setores circulares obtemos a área exata do círculo. Para prosseguir com a animação tens de clicar nos quadrados ( ).

- ☒ 1. Considera o círculo de centro C e medida de raio r. Recorda que o perímetro de uma circunferência de centro C e medida de raio r é dado por  $P = 2\pi r$ .  
☒ Mostrar centro ☐ Mostrar raio  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ , obtém-se uma imagem idêntica à seguinte:
- ☒ 2. Decompondo o círculo em n triângulos (com vértices no centro do círculo e sobre cada um dos extremos do arco de circunferência cuja amplitude será  $\alpha$ ).

Neste caso consideraram-se 36 setores circulares com amplitude  $10^\circ$ .

- ☒ 3. Considera o diâmetro vertical, obtém-se então dois pontos que dividem o círculo em duas partes geometricamente iguais.  
☒ Mostrar pontos de interseção (B e D)
- ☒ 4. Vamos cortar o círculo nos setores que foram desenhados, mantendo-os unidos pela linha poligonal que corresponde à aproximação da circunferência. Vamos abrir a partir do ponto de corte (ponto D), para ambos os lados, ou seja, quer no sentido horário, quer no sentido anti-horário, até que a circunferência se transforme num segmento de reta.

**Nota: para prosseguir a abertura tem de estar efetuado!**

- ☒ 5. Corta-se a figura no ponto B e faz-se uma rotação da parte que fica à direita do ponto B, de  $-180^\circ$  (no sentido dos ponteiros do relógio), com centro no ponto médio de [A, B] (ponto M). O objetivo é que essa parte encaixe na outra metade.

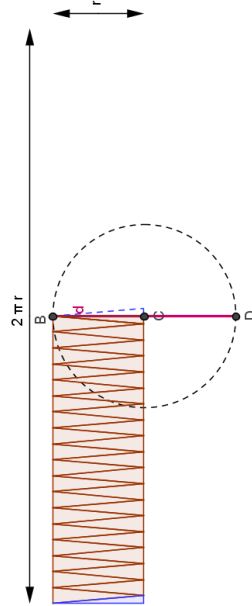
**Nota: para prosseguir a abertura tem de estar efetuado!**

- ☒ 6. A figura geométrica que se obtém é um paralelogramo, vamos transformá-lo num retângulo. Para isso vamos dividir o triângulo que contém o centro da circunferência num dos seus lados em dois triângulos geometricamente iguais. De seguida temos de fazer uma translação do triângulo azul para se obter um retângulo cujas medidas da base é  $\pi r$  e da altura é r.

- ☒ 7. Então, como a área do retângulo se obtém multiplicando as medidas da base pela altura,  $\text{Área}_{\text{Retângulo}} = b \times h = (\pi r) \times r = \pi \times r^2$

- ☒ Podemos então concluir que a fórmula do cálculo da área do círculo é:

$$\text{Área do círculo} = \pi \times r^2 \quad (\text{unidades de área})$$



## 7.2. Protocolo de construção

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
1	Ponto A	Pontos de Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)	Intersect(EixoX, EixoY)	C
2	Ponto B	Ponto em EixoY	B = (0, 1)	Ponto(EixoY)	
3	Circunferência $c_2$	Circunferência que contém B, com centro A	$c_2: x^2 + y^2 = 1$	Circunferência[A, B]	
4	Ângulo $\alpha$		$\alpha = 10^\circ$		
5	Número a		a = 1		
6	Ponto C1	Imagem de B na rotação de ângulo $\alpha$	C1 = (-0.17, 0.98)	Rotação[B, $\alpha$ , A]	
7	Número b	Se[a < 1, a, 1]	b = 1	Se[a < 1, a, 1]	
8	Ponto B1	Imagem de C1 na rotação de ângulo $-(b \cdot \alpha / 2)$	B1 = (-0.17, 1)	Rotação[C1, $-(b \cdot \alpha / 2)$ , B]	
9	Ponto A1	Imagem de A na rotação de ângulo $-(b \cdot \alpha / 2)$	A1 = (-0.09, 0)	Rotação[A, $-(b \cdot \alpha / 2)$ , B]	
10	Ponto C2	Imagem de B1 na rotação de ângulo $\alpha$	C2 = (-0.35, 0.97)	Rotação[B1, $\alpha$ , A1]	
11	Ponto B2	Imagem de C2 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B2 = (-0.35, 1)	Rotação[C2, $-b \cdot \alpha$ , B1]	
12	Ponto A2	Imagem de A1 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A2 = (-0.26, 0)	Rotação[A1, $-b \cdot \alpha$ , B1]	
13	Ponto C3	Imagem de B2 na rotação de ângulo $\alpha$	C3 = (-0.52, 0.97)	Rotação[B2, $\alpha$ , A2]	
14	Ponto B3	Imagem de C3 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B3 = (-0.52, 1)	Rotação[C3, $-b \cdot \alpha$ , B2]	
15	Reta d	Reta que contém B e é paralela a EixoX	d: y = 1	Reta[B, EixoX]	
16	Ponto A3	Imagem de A2 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A3 = (-0.44, 0)	Rotação[A2, $-b \cdot \alpha$ , B2]	
17	Ponto C4	Imagem de B3 na rotação de ângulo $\alpha$	C4 = (-0.69, 0.97)	Rotação[B3, $\alpha$ , A3]	
18	Ponto B4	Imagem de C4 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B4 = (-0.7, 1)	Rotação[C4, $-b \cdot \alpha$ , B3]	
19	Ponto A4	Imagem de A3 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A4 = (-0.61, 0)	Rotação[A3, $-b \cdot \alpha$ , B3]	
20	Ponto A5	Imagem de A4 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A5 = (-0.78, 0)	Rotação[A4, $-b \cdot \alpha$ , B4]	
21	Ponto C5	Imagem de B4 na rotação de ângulo $\alpha$	C5 = (-0.87, 0.97)	Rotação[B4, $\alpha$ , A4]	
22	Ponto B5	Imagem de C5 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B5 = (-0.87, 1)	Rotação[C5, $-b \cdot \alpha$ , B4]	
23	Ponto A6	Imagem de A5 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A6 = (-0.96, 0)	Rotação[A5, $-b \cdot \alpha$ , B5]	
24	Ponto C6	Imagem de B5 na rotação de ângulo $\alpha$	C6 = (-1.04, 0.97)	Rotação[B5, $\alpha$ , A5]	
25	Ponto B6	Imagem de C6 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B6 = (-1.05, 1)	Rotação[C6, $-b \cdot \alpha$ , B5]	
26	Ponto C7	Imagem de B6 na rotação de ângulo $\alpha$	C7 = (-1.22, 0.97)	Rotação[B6, $\alpha$ , A6]	
27	Ponto B7	Imagem de C7 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B7 = (-1.22, 1)	Rotação[C7, $-b \cdot \alpha$ , B6]	
28	Ponto A7	Imagem de A6 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A7 = (-1.13, 0)	Rotação[A6, $-b \cdot \alpha$ , B6]	
29	Ponto C8	Imagem de B7 na rotação de ângulo $\alpha$	C8 = (-1.39, 0.97)	Rotação[B7, $\alpha$ , A7]	
30	Ponto B8	Imagem de C8 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B8 = (-1.39, 1)	Rotação[C8, $-b \cdot \alpha$ , B7]	
31	Ponto A8	Imagem de A7 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A8 = (-1.31, 0)	Rotação[A7, $-b \cdot \alpha$ , B7]	
32	Ponto C9	Imagem de B8 na rotação de ângulo $\alpha$	C9 = (-1.57, 0.97)	Rotação[B8, $\alpha$ , A8]	
33	Ponto B9	Imagem de C9 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B9 = (-1.57, 1)	Rotação[C9, $-b \cdot \alpha$ , B8]	
34	Ponto A9	Imagem de A8 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A9 = (-1.48, 0)	Rotação[A8, $-b \cdot \alpha$ , B8]	
35	Ponto C10	Imagem de B9 na rotação de ângulo $\alpha$	C10 = (-1.74, 0.97)	Rotação[B9, $\alpha$ , A9]	
36	Ponto B10	Imagem de C10 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B10 = (-1.74, 1)	Rotação[C10, $-b \cdot \alpha$ , B9]	
37	Ponto A10	Imagem de A9 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A10 = (-1.66, 0)	Rotação[A9, $-b \cdot \alpha$ , B9]	
38	Ponto C11	Imagem de B10 na rotação de ângulo $\alpha$	C11 = (-1.91, 0.97)	Rotação[B10, $\alpha$ , A10]	
39	Ponto B11	Imagem de C11 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B11 = (-1.92, 1)	Rotação[C11, $-b \cdot \alpha$ , B10]	
40	Ponto A11	Imagem de A10 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A11 = (-1.83, 0)	Rotação[A10, $-b \cdot \alpha$ , B10]	
41	Ponto C12	Imagem de B11 na rotação de ângulo $\alpha$	C12 = (-2.09, 0.97)	Rotação[B11, $\alpha$ , A11]	
42	Ponto B12	Imagem de C12 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B12 = (-2.09, 1)	Rotação[C12, $-b \cdot \alpha$ , B11]	
43	Ponto A12	Imagem de A11 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A12 = (-2, 0)	Rotação[A11, $-b \cdot \alpha$ , B11]	
44	Ponto C13	Imagem de B12 na rotação de ângulo $\alpha$	C13 = (-2.26, 0.97)	Rotação[B12, $\alpha$ , A12]	
45	Ponto B13	Imagem de C13 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B13 = (-2.27, 1)	Rotação[C13, $-b \cdot \alpha$ , B12]	
46	Ponto A13	Imagem de A12 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A13 = (-2.18, 0)	Rotação[A12, $-b \cdot \alpha$ , B12]	
47	Ponto C14	Imagem de B13 na rotação de ângulo $\alpha$	C14 = (-2.44, 0.97)	Rotação[B13, $\alpha$ , A13]	
48	Ponto B14	Imagem de C14 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	B14 = (-2.44, 1)	Rotação[C14, $-b \cdot \alpha$ , B13]	
49	Ponto A14	Imagem de A13 na rotação de ângulo $-b \cdot \alpha$	A14 = (-2.35, 0)	Rotação[A13, $-b \cdot \alpha$ , B13]	

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
50	Ponto C15	Imagem de B14 na rotação de ângulo $\alpha$	$C15 = (-2.61, 0.97)$	Rotação[B14, $\alpha$ , A14]	
51	Ponto B15	Imagem de C15 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$B15 = (-2.61, 1)$	Rotação[C15, $-b \alpha$ , B14]	
52	Ponto A15	Imagem de A14 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$A15 = (-2.53, 0)$	Rotação[A14, $-b \alpha$ , B14]	
53	Ponto C16	Imagem de B15 na rotação de ângulo $\alpha$	$C16 = (-2.79, 0.97)$	Rotação[B15, $\alpha$ , A15]	
54	Ponto B16	Imagem de C16 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$B16 = (-2.79, 1)$	Rotação[C16, $-b \alpha$ , B15]	
55	Ponto A16	Imagem de A15 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$A16 = (-2.7, 0)$	Rotação[A15, $-b \alpha$ , B15]	
56	Ponto C17	Imagem de B16 na rotação de ângulo $\alpha$	$C17 = (-2.96, 0.97)$	Rotação[B16, $\alpha$ , A16]	
57	Ponto B17	Imagem de C17 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$B17 = (-2.96, 1)$	Rotação[C17, $-b \alpha$ , B16]	
58	Ponto A17	Imagem de A16 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$A17 = (-2.88, 0)$	Rotação[A16, $-b \alpha$ , B16]	
59	Ponto C18	Imagem de B17 na rotação de ângulo $\alpha$	$C18 = (-3.13, 0.97)$	Rotação[B17, $\alpha$ , A17]	
60	Ponto B18	Imagem de C18 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$B18 = (-3.14, 1)$	Rotação[C18, $-b \alpha$ , B17]	
61	Ponto A18	Imagem de A17 na rotação de ângulo $-b \alpha$	$A18 = (-3.05, 0)$	Rotação[A17, $-b \alpha$ , B17]	
62	Triângulo polígono1	Polígono B, A1, B1	polígono1 = 0.09	Polígono[B, A1, B1]	
62	Segmento de Reta b1	Segmento de Reta [B, A1] de Triângulo polígono1	$b1 = 1$	SegmentodeReta[B, A1, polígono1]	
62	Segmento de Reta $b_{1_i}$	Segmento de Reta [A1, B1] de Triângulo polígono1	$b_{1_i} = 1$	SegmentodeReta[A1, B1, polígono1]	
62	Segmento de Reta a1	Segmento de Reta [B1, B] de Triângulo polígono1	$a1 = 0.17$	SegmentodeReta[B1, B, polígono1]	
63	Triângulo polígono2	Polígono B1, A2, B2	polígono2 = 0.09	Polígono[B1, A2, B2]	
63	Segmento de Reta b2	Segmento de Reta [B1, A2] de Triângulo polígono2	$b2 = 1$	SegmentodeReta[B1, A2, polígono2]	
63	Segmento de Reta $b_{1_i}$	Segmento de Reta [A2, B2] de Triângulo polígono2	$b_{1_i} = 1$	SegmentodeReta[A2, B2, polígono2]	
63	Segmento de Reta a2	Segmento de Reta [B2, B1] de Triângulo polígono2	$a2 = 0.17$	SegmentodeReta[B2, B1, polígono2]	
64	Triângulo polígono3	Polígono B2, A3, B3	polígono3 = 0.09	Polígono[B2, A3, B3]	
64	Segmento de Reta b3	Segmento de Reta [B2, A3] de Triângulo polígono3	$b3 = 1$	SegmentodeReta[B2, A3, polígono3]	
64	Segmento de Reta $b_{2_i}$	Segmento de Reta [A3, B3] de Triângulo polígono3	$b_{2_i} = 1$	SegmentodeReta[A3, B3, polígono3]	
64	Segmento de Reta a3	Segmento de Reta [B3, B2] de Triângulo polígono3	$a3 = 0.17$	SegmentodeReta[B3, B2, polígono3]	
65	Triângulo polígono4	Polígono B3, A4, B4	polígono4 = 0.09	Polígono[B3, A4, B4]	
65	Segmento de Reta b4	Segmento de Reta [B3, A4] de Triângulo polígono4	$b4 = 1$	SegmentodeReta[B3, A4, polígono4]	
65	Segmento de Reta $b_{3_i}$	Segmento de Reta [A4, B4] de Triângulo polígono4	$b_{3_i} = 1$	SegmentodeReta[A4, B4, polígono4]	
65	Segmento de Reta a4	Segmento de Reta [B4, B3] de Triângulo polígono4	$a4 = 0.17$	SegmentodeReta[B4, B3, polígono4]	
66	Triângulo polígono5	Polígono B4, A5, B5	polígono5 = 0.09	Polígono[B4, A5, B5]	
66	Segmento de Reta b5	Segmento de Reta [B4, A5] de Triângulo polígono5	$b5 = 1$	SegmentodeReta[B4, A5, polígono5]	
66	Segmento de Reta $b_{4_i}$	Segmento de Reta [A5, B5] de Triângulo polígono5	$b_{4_i} = 1$	SegmentodeReta[A5, B5, polígono5]	
66	Segmento de Reta a5	Segmento de Reta [B5, B4] de Triângulo polígono5	$a5 = 0.17$	SegmentodeReta[B5, B4, polígono5]	
67	Triângulo polígono6	Polígono B5, A6, B6	polígono6 = 0.09	Polígono[B5, A6, B6]	
67	Segmento de Reta b6	Segmento de Reta [B5, A6] de Triângulo polígono6	$b6 = 1$	SegmentodeReta[B5, A6, polígono6]	
67	Segmento de Reta $b_{5_i}$	Segmento de Reta [A6, B6] de Triângulo polígono6	$b_{5_i} = 1$	SegmentodeReta[A6, B6, polígono6]	
67	Segmento de Reta a6	Segmento de Reta [B6, B5] de Triângulo polígono6	$a6 = 0.17$	SegmentodeReta[B6, B5, polígono6]	
68	Triângulo polígono7	Polígono B6, A7, B7	polígono7 = 0.09	Polígono[B6, A7, B7]	
68	Segmento de Reta b7	Segmento de Reta [B6, A7] de Triângulo polígono7	$b7 = 1$	SegmentodeReta[B6, A7, polígono7]	
68	Segmento de Reta $b_{6_i}$	Segmento de Reta [A7, B7] de Triângulo polígono7	$b_{6_i} = 1$	SegmentodeReta[A7, B7, polígono7]	
68	Segmento de Reta a7	Segmento de Reta [B7, B6] de Triângulo polígono7	$a7 = 0.17$	SegmentodeReta[B7, B6, polígono7]	
69	Triângulo polígono8	Polígono B7, A8, B8	polígono8 = 0.09	Polígono[B7, A8, B8]	
69	Segmento de Reta b8	Segmento de Reta [B7, A8] de Triângulo polígono8	$b8 = 1$	SegmentodeReta[B7, A8, polígono8]	
69	Segmento de Reta $b_{7_i}$	Segmento de Reta [A8, B8] de Triângulo polígono8	$b_{7_i} = 1$	SegmentodeReta[A8, B8, polígono8]	
69	Segmento de Reta a8	Segmento de Reta [B8, B7] de Triângulo polígono8	$a8 = 0.17$	SegmentodeReta[B8, B7, polígono8]	
70	Triângulo polígono9	Polígono B8, A9, B9	polígono9 = 0.09	Polígono[B8, A9, B9]	
70	Segmento de Reta b9	Segmento de Reta [B8, A9] de Triângulo polígono9	$b9 = 1$	SegmentodeReta[B8, A9, polígono9]	
70	Segmento de Reta $b_{8_i}$	Segmento de Reta [A9, B9] de Triângulo polígono9	$b_{8_i} = 1$	SegmentodeReta[A9, B9, polígono9]	
70	Segmento de Reta a9	Segmento de Reta [B9, B8] de Triângulo polígono9	$a9 = 0.17$	SegmentodeReta[B9, B8, polígono9]	

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
71	Triângulo polígono10	Polígono B10, A10, B9	polígono10 = 0.09	Polígono[B10, A10, B9]	
71	Segmento de Reta b9 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B10, A10] de Triângulo polígono10	b9 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B10, A10, polígono10]	
71	Segmento de Reta b10	Segmento de Reta [A10, B9] de Triângulo polígono10	b10 = 1	SegmentodeReta[A10, B9, polígono10]	
71	Segmento de Reta a10	Segmento de Reta [B9, B10] de Triângulo polígono10	a10 = 0.17	SegmentodeReta[B9, B10, polígono10]	
72	Triângulo polígono11	Polígono B10, A11, B11	polígono11 = 0.09	Polígono[B10, A11, B11]	
72	Segmento de Reta b11	Segmento de Reta [B10, A11] de Triângulo polígono11	b11 = 1	SegmentodeReta[B10, A11, polígono11]	
72	Segmento de Reta b10 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A11, B11] de Triângulo polígono11	b10 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A11, B11, polígono11]	
72	Segmento de Reta a11	Segmento de Reta [B11, B10] de Triângulo polígono11	a11 = 0.17	SegmentodeReta[B11, B10, polígono11]	
73	Triângulo polígono12	Polígono B11, A12, B12	polígono12 = 0.09	Polígono[B11, A12, B12]	
73	Segmento de Reta b12	Segmento de Reta [B11, A12] de Triângulo polígono12	b12 = 1	SegmentodeReta[B11, A12, polígono12]	
73	Segmento de Reta b11 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A12, B12] de Triângulo polígono12	b11 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A12, B12, polígono12]	
73	Segmento de Reta a12	Segmento de Reta [B12, B11] de Triângulo polígono12	a12 = 0.17	SegmentodeReta[B12, B11, polígono12]	
74	Triângulo polígono13	Polígono B12, A13, B13	polígono13 = 0.09	Polígono[B12, A13, B13]	
74	Segmento de Reta b13	Segmento de Reta [B12, A13] de Triângulo polígono13	b13 = 1	SegmentodeReta[B12, A13, polígono13]	
74	Segmento de Reta b12 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A13, B13] de Triângulo polígono13	b12 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A13, B13, polígono13]	
74	Segmento de Reta a13	Segmento de Reta [B13, B12] de Triângulo polígono13	a13 = 0.17	SegmentodeReta[B13, B12, polígono13]	
75	Triângulo polígono14	Polígono B13, A14, B14	polígono14 = 0.09	Polígono[B13, A14, B14]	
75	Segmento de Reta b14	Segmento de Reta [B13, A14] de Triângulo polígono14	b14 = 1	SegmentodeReta[B13, A14, polígono14]	
75	Segmento de Reta b13 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A14, B14] de Triângulo polígono14	b13 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A14, B14, polígono14]	
75	Segmento de Reta a14	Segmento de Reta [B14, B13] de Triângulo polígono14	a14 = 0.17	SegmentodeReta[B14, B13, polígono14]	
76	Triângulo polígono15	Polígono B14, A15, B15	polígono15 = 0.09	Polígono[B14, A15, B15]	
76	Segmento de Reta b15	Segmento de Reta [B14, A15] de Triângulo polígono15	b15 = 1	SegmentodeReta[B14, A15, polígono15]	
76	Segmento de Reta b14 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A15, B15] de Triângulo polígono15	b14 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A15, B15, polígono15]	
76	Segmento de Reta a15	Segmento de Reta [B15, B14] de Triângulo polígono15	a15 = 0.17	SegmentodeReta[B15, B14, polígono15]	
77	Triângulo polígono16	Polígono B15, A16, B16	polígono16 = 0.09	Polígono[B15, A16, B16]	
77	Segmento de Reta b16	Segmento de Reta [B15, A16] de Triângulo polígono16	b16 = 1	SegmentodeReta[B15, A16, polígono16]	
77	Segmento de Reta b15 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A16, B16] de Triângulo polígono16	b15 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A16, B16, polígono16]	
77	Segmento de Reta a16	Segmento de Reta [B16, B15] de Triângulo polígono16	a16 = 0.17	SegmentodeReta[B16, B15, polígono16]	
78	Triângulo polígono17	Polígono B16, A17, B17	polígono17 = 0.09	Polígono[B16, A17, B17]	
78	Segmento de Reta b17	Segmento de Reta [B16, A17] de Triângulo polígono17	b17 = 1	SegmentodeReta[B16, A17, polígono17]	
78	Segmento de Reta b16 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A17, B17] de Triângulo polígono17	b16 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A17, B17, polígono17]	
78	Segmento de Reta a17	Segmento de Reta [B17, B16] de Triângulo polígono17	a17 = 0.17	SegmentodeReta[B17, B16, polígono17]	
79	Triângulo polígono18	Polígono B17, A18, B18	polígono18 = 0.09	Polígono[B17, A18, B18]	
79	Segmento de Reta b18	Segmento de Reta [B17, A18] de Triângulo polígono18	b18 = 1	SegmentodeReta[B17, A18, polígono18]	
79	Segmento de Reta b17 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [A18, B18] de Triângulo polígono18	b17 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[A18, B18, polígono18]	
79	Segmento de Reta a18	Segmento de Reta [B18, B17] de Triângulo polígono18	a18 = 0.17	SegmentodeReta[B18, B17, polígono18]	
80	Ponto B17'	B17 refletido a EixoY	B17' = (2.96, 1)	Reflexão[B17, EixoY]	
81	Ponto A18'	A18 refletido a EixoY	A18' = (3.05, 0)	Reflexão[A18, EixoY]	
82	Ponto B18'	B18 refletido a EixoY	B18' = (3.14, 1)	Reflexão[B18, EixoY]	
83	Triângulo polígono18'	Polígono B17', A18', B18'	polígono18' = 0.09	Polígono[B17', A18', B18']	
83	Segmento de Reta b18'	Segmento de Reta [B17', A18'] de Triângulo polígono18'	b18' = 1	SegmentodeReta[B17', A18', polígono18']	
83	Segmento de Reta b17'	Segmento de Reta [A18', B18'] de Triângulo polígono18'	b17' = 1	SegmentodeReta[A18', B18', polígono18']	
83	Segmento de Reta a18'	Segmento de Reta [B18', B17'] de Triângulo polígono18'	a18' = 0.17	SegmentodeReta[B18', B17', polígono18']	
84	Ponto B16'	B16 refletido a EixoY	B16' = (2.79, 1)	Reflexão[B16, EixoY]	
85	Ponto A17'	A17 refletido a EixoY	A17' = (2.88, 0)	Reflexão[A17, EixoY]	
86	Ponto B17' <sub>1</sub>	B17 refletido a EixoY	B17' <sub>1</sub> = (2.96, 1)	Reflexão[B17, EixoY]	
87	Triângulo polígono17'	Polígono B16', A17', B17' <sub>1</sub>	polígono17' = 0.09	Polígono[B16', A17', B17' <sub>1</sub> ]	

N	NOME	Definição	Valor	Comando	Legenda
87	Segmento de Reta b17 <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B16', A17'] de Triângulo polígono17'	b17 <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B16', A17', polígono17']	
87	Segmento de Reta b16'	Segmento de Reta [A17', B17 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono17'	b16' = 1	SegmentodeReta[A17', B17 <sub>1</sub> ', polígono17']	
87	Segmento de Reta a17'	Segmento de Reta [B17 <sub>1</sub> ', B16'] de Triângulo polígono17'	a17' = 0.17	SegmentodeReta[B17 <sub>1</sub> ', B16', polígono17']	
88	Ponto B15'	B15 refletido a EixoY	B15' = (2.61, 1)	Reflexão[B15, EixoY]	
89	Ponto A16'	A16 refletido a EixoY	A16' = (2.7, 0)	Reflexão[A16, EixoY]	
90	Ponto B16 <sub>1</sub> '	B16 refletido a EixoY	B16 <sub>1</sub> ' = (2.78, 1)	Reflexão[B16, EixoY]	
91	Triângulo polígono16'	Polígono B15', A16', B16 <sub>1</sub> '	polígono16' = 0.09	Polígono[B15', A16', B16 <sub>1</sub> ']	
91	Segmento de Reta b16 <sub>1</sub> '	Segmento de Reta [B15', A16'] de Triângulo polígono16'	b16 <sub>1</sub> ' = 1	SegmentodeReta[B15', A16', polígono16']	
91	Segmento de Reta b15'	Segmento de Reta [A16', B16 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono16'	b15' = 1	SegmentodeReta[A16', B16 <sub>1</sub> ', polígono16']	
91	Segmento de Reta a16'	Segmento de Reta [B16 <sub>1</sub> ', B15'] de Triângulo polígono16'	a16' = 0.17	SegmentodeReta[B16 <sub>1</sub> ', B15', polígono16']	
92	Ponto B14'	B14 refletido a EixoY	B14' = (2.44, 1)	Reflexão[B14, EixoY]	
93	Ponto A15'	A15 refletido a EixoY	A15' = (2.53, 0)	Reflexão[A15, EixoY]	
94	Ponto B15 <sub>1</sub> '	B15 refletido a EixoY	B15 <sub>1</sub> ' = (2.61, 1)	Reflexão[B15, EixoY]	
95	Triângulo polígono15'	Polígono B14', A15', B15 <sub>1</sub> '	polígono15' = 0.09	Polígono[B14', A15', B15 <sub>1</sub> ']	
95	Segmento de Reta b15 <sub>1</sub> '	Segmento de Reta [B14', A15'] de Triângulo polígono15'	b15 <sub>1</sub> ' = 1	SegmentodeReta[B14', A15', polígono15']	
95	Segmento de Reta b14'	Segmento de Reta [A15', B15 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono15'	b14' = 1	SegmentodeReta[A15', B15 <sub>1</sub> ', polígono15']	
95	Segmento de Reta a15'	Segmento de Reta [B15 <sub>1</sub> ', B14'] de Triângulo polígono15'	a15' = 0.17	SegmentodeReta[B15 <sub>1</sub> ', B14', polígono15']	
96	Ponto B13'	B13 refletido a EixoY	B13' = (2.27, 1)	Reflexão[B13, EixoY]	
97	Ponto A14'	A14 refletido a EixoY	A14' = (2.35, 0)	Reflexão[A14, EixoY]	
98	Ponto B14 <sub>1</sub> '	B14 refletido a EixoY	B14 <sub>1</sub> ' = (2.44, 1)	Reflexão[B14, EixoY]	
99	Triângulo polígono14'	Polígono B13', A14', B14 <sub>1</sub> '	polígono14' = 0.09	Polígono[B13', A14', B14 <sub>1</sub> ']	
99	Segmento de Reta b14 <sub>1</sub> '	Segmento de Reta [B13', A14'] de Triângulo polígono14'	b14 <sub>1</sub> ' = 1	SegmentodeReta[B13', A14', polígono14']	
99	Segmento de Reta b13'	Segmento de Reta [A14', B14 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono14'	b13' = 1	SegmentodeReta[A14', B14 <sub>1</sub> ', polígono14']	
99	Segmento de Reta a14'	Segmento de Reta [B14 <sub>1</sub> ', B13'] de Triângulo polígono14'	a14' = 0.17	SegmentodeReta[B14 <sub>1</sub> ', B13', polígono14']	
100	Ponto B12'	B12 refletido a EixoY	B12' = (2.09, 1)	Reflexão[B12, EixoY]	
101	Ponto A13'	A13 refletido a EixoY	A13' = (2.18, 0)	Reflexão[A13, EixoY]	
102	Ponto B13 <sub>1</sub> '	B13 refletido a EixoY	B13 <sub>1</sub> ' = (2.27, 1)	Reflexão[B13, EixoY]	
103	Triângulo polígono13'	Polígono B12', A13', B13 <sub>1</sub> '	polígono13' = 0.09	Polígono[B12', A13', B13 <sub>1</sub> ']	
103	Segmento de Reta b13 <sub>1</sub> '	Segmento de Reta [B12', A13'] de Triângulo polígono13'	b13 <sub>1</sub> ' = 1	SegmentodeReta[B12', A13', polígono13']	
103	Segmento de Reta b12'	Segmento de Reta [A13', B13 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono13'	b12' = 1	SegmentodeReta[A13', B13 <sub>1</sub> ', polígono13']	
103	Segmento de Reta a13'	Segmento de Reta [B13 <sub>1</sub> ', B12'] de Triângulo polígono13'	a13' = 0.17	SegmentodeReta[B13 <sub>1</sub> ', B12', polígono13']	
104	Ponto B11'	B11 refletido a EixoY	B11' = (1.92, 1)	Reflexão[B11, EixoY]	
105	Ponto A12'	A12 refletido a EixoY	A12' = (2, 0)	Reflexão[A12, EixoY]	
106	Ponto B12 <sub>1</sub> '	B12 refletido a EixoY	B12 <sub>1</sub> ' = (2.09, 1)	Reflexão[B12, EixoY]	
107	Triângulo polígono12'	Polígono B11', A12', B12 <sub>1</sub> '	polígono12' = 0.09	Polígono[B11', A12', B12 <sub>1</sub> ']	
107	Segmento de Reta b12 <sub>1</sub> '	Segmento de Reta [B11', A12'] de Triângulo polígono12'	b12 <sub>1</sub> ' = 1	SegmentodeReta[B11', A12', polígono12']	
107	Segmento de Reta b11'	Segmento de Reta [A12', B12 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono12'	b11' = 1	SegmentodeReta[A12', B12 <sub>1</sub> ', polígono12']	
107	Segmento de Reta a12'	Segmento de Reta [B12 <sub>1</sub> ', B11'] de Triângulo polígono12'	a12' = 0.17	SegmentodeReta[B12 <sub>1</sub> ', B11', polígono12']	
108	Ponto B10'	B10 refletido a EixoY	B10' = (1.74, 1)	Reflexão[B10, EixoY]	
109	Ponto A11'	A11 refletido a EixoY	A11' = (1.83, 0)	Reflexão[A11, EixoY]	
110	Ponto B11 <sub>1</sub> '	B11 refletido a EixoY	B11 <sub>1</sub> ' = (1.92, 1)	Reflexão[B11, EixoY]	
111	Triângulo polígono11'	Polígono B10', A11', B11 <sub>1</sub> '	polígono11' = 0.09	Polígono[B10', A11', B11 <sub>1</sub> ']	
111	Segmento de Reta b11 <sub>1</sub> '	Segmento de Reta [B10', A11'] de Triângulo polígono11'	b11 <sub>1</sub> ' = 1	SegmentodeReta[B10', A11', polígono11']	
111	Segmento de Reta b10'	Segmento de Reta [A11', B11 <sub>1</sub> '] de Triângulo polígono11'	b10' = 1	SegmentodeReta[A11', B11 <sub>1</sub> ', polígono11']	
111	Segmento de Reta a11'	Segmento de Reta [B11 <sub>1</sub> ', B10'] de Triângulo polígono11'	a11' = 0.17	SegmentodeReta[B11 <sub>1</sub> ', B10', polígono11']	

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
112	Ponto B10'	B10 refletido a EixoY	$B10'_1 = (1.74, 1)$	Reflexão[B10, EixoY]	
113	Ponto A10'	A10 refletido a EixoY	$A10' = (1.66, 0)$	Reflexão[A10, EixoY]	
114	Ponto B9'	B9 refletido a EixoY	$B9' = (1.57, 1)$	Reflexão[B9, EixoY]	
115	Triângulo polígono10'	Polígono B10', A10', B9'	polígono10' = 0.09	Polígono[B10', A10', B9']	
115	Segmento de Reta b9'	Segmento de Reta [B10', A10'] de Triângulo polígono10'	$b9' = 1$	SegmentodeReta[B10', A10', polígono10']	
115	Segmento de Reta b10'	Segmento de Reta [A10', B9'] de Triângulo polígono10'	$b10'_1 = 1$	SegmentodeReta[A10', B9', polígono10']	
115	Segmento de Reta a10'	Segmento de Reta [B9', B10',] de Triângulo polígono10'	$a10' = 0.17$	SegmentodeReta[B9', B10', polígono10']	
116	Ponto B8'	B8 refletido a EixoY	$B8' = (1.39, 1)$	Reflexão[B8, EixoY]	
117	Ponto A9'	A9 refletido a EixoY	$A9' = (1.48, 0)$	Reflexão[A9, EixoY]	
118	Ponto B9'	B9 refletido a EixoY	$B9'_1 = (1.57, 1)$	Reflexão[B9, EixoY]	
119	Triângulo polígono9'	Polígono B8', A9', B9'	polígono9' = 0.09	Polígono[B8', A9', B9']	
119	Segmento de Reta b9'	Segmento de Reta [B8', A9'] de Triângulo polígono9'	$b9'_1 = 1$	SegmentodeReta[B8', A9', polígono9']	
119	Segmento de Reta b8'	Segmento de Reta [A9', B9'] de Triângulo polígono9'	$b8' = 1$	SegmentodeReta[A9', B9', polígono9']	
119	Segmento de Reta a9'	Segmento de Reta [B9', B8'] de Triângulo polígono9'	$a9' = 0.17$	SegmentodeReta[B9', B8', polígono9']	
120	Ponto B7'	B7 refletido a EixoY	$B7' = (1.22, 1)$	Reflexão[B7, EixoY]	
121	Ponto A8'	A8 refletido a EixoY	$A8' = (1.31, 0)$	Reflexão[A8, EixoY]	
122	Ponto B8'	B8 refletido a EixoY	$B8'_1 = (1.39, 1)$	Reflexão[B8, EixoY]	
123	Triângulo polígono8'	Polígono B7', A8', B8'	polígono8' = 0.09	Polígono[B7', A8', B8']	
123	Segmento de Reta b8'	Segmento de Reta [B7', A8'] de Triângulo polígono8'	$b8'_1 = 1$	SegmentodeReta[B7', A8', polígono8']	
123	Segmento de Reta b7'	Segmento de Reta [A8', B8'] de Triângulo polígono8'	$b7' = 1$	SegmentodeReta[A8', B8', polígono8']	
123	Segmento de Reta a8'	Segmento de Reta [B8', B7'] de Triângulo polígono8'	$a8' = 0.17$	SegmentodeReta[B8', B7', polígono8']	
124	Ponto B6'	B6 refletido a EixoY	$B6' = (1.05, 1)$	Reflexão[B6, EixoY]	
125	Ponto A7'	A7 refletido a EixoY	$A7' = (1.13, 0)$	Reflexão[A7, EixoY]	
126	Ponto B7'	B7 refletido a EixoY	$B7'_1 = (1.22, 1)$	Reflexão[B7, EixoY]	
127	Triângulo polígono7'	Polígono B6', A7', B7'	polígono7' = 0.09	Polígono[B6', A7', B7']	
127	Segmento de Reta b7'	Segmento de Reta [B6', A7'] de Triângulo polígono7'	$b7'_1 = 1$	SegmentodeReta[B6', A7', polígono7']	
127	Segmento de Reta b6'	Segmento de Reta [A7', B7'] de Triângulo polígono7'	$b6' = 1$	SegmentodeReta[A7', B7', polígono7']	
127	Segmento de Reta a7'	Segmento de Reta [B7', B6'] de Triângulo polígono7'	$a7' = 0.17$	SegmentodeReta[B7', B6', polígono7']	
128	Ponto B5'	B5 refletido a EixoY	$B5' = (0.87, 1)$	Reflexão[B5, EixoY]	
129	Ponto A6'	A6 refletido a EixoY	$A6' = (0.96, 0)$	Reflexão[A6, EixoY]	
130	Ponto B6'	B6 refletido a EixoY	$B6'_1 = (1.05, 1)$	Reflexão[B6, EixoY]	
131	Triângulo polígono6'	Polígono B5', A6', B6'	polígono6' = 0.09	Polígono[B5', A6', B6']	
131	Segmento de Reta b6'	Segmento de Reta [B5', A6'] de Triângulo polígono6'	$b6'_1 = 1$	SegmentodeReta[B5', A6', polígono6']	
131	Segmento de Reta b5'	Segmento de Reta [A6', B6'] de Triângulo polígono6'	$b5' = 1$	SegmentodeReta[A6', B6', polígono6']	
131	Segmento de Reta a6'	Segmento de Reta [B6', B5'] de Triângulo polígono6'	$a6' = 0.17$	SegmentodeReta[B6', B5', polígono6']	
132	Ponto B4'	B4 refletido a EixoY	$B4' = (0.7, 1)$	Reflexão[B4, EixoY]	
133	Ponto A5'	A5 refletido a EixoY	$A5' = (0.78, 0)$	Reflexão[A5, EixoY]	
134	Ponto B5'	B5 refletido a EixoY	$B5'_1 = (0.87, 1)$	Reflexão[B5, EixoY]	
135	Triângulo polígono5'	Polígono B4', A5', B5'	polígono5' = 0.09	Polígono[B4', A5', B5']	
135	Segmento de Reta b5'	Segmento de Reta [B4', A5'] de Triângulo polígono5'	$b5'_1 = 1$	SegmentodeReta[B4', A5', polígono5']	
135	Segmento de Reta b4'	Segmento de Reta [A5', B5'] de Triângulo polígono5'	$b4' = 1$	SegmentodeReta[A5', B5', polígono5']	
135	Segmento de Reta a5'	Segmento de Reta [B5', B4'] de Triângulo polígono5'	$a5' = 0.17$	SegmentodeReta[B5', B4', polígono5']	
136	Ponto B3'	B3 refletido a EixoY	$B3' = (0.52, 1)$	Reflexão[B3, EixoY]	
137	Ponto A4'	A4 refletido a EixoY	$A4' = (0.61, 0)$	Reflexão[A4, EixoY]	
138	Ponto B4'	B4 refletido a EixoY	$B4'_1 = (0.7, 1)$	Reflexão[B4, EixoY]	

N	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
139	Triângulo polígono4'	Polígono B3', A4', B4',	polígono4' = 0.09	Polígono[B3', A4', B4',	
139	Segmento de Reta b4'	Segmento de Reta [B3', A4'] de Triângulo polígono4'	b4' = 1	SegmentodeReta[B3', A4', polígono4']	
139	Segmento de Reta b3'	Segmento de Reta [A4', B4',] de Triângulo polígono4'	b3' = 1	SegmentodeReta[A4', B4', polígono4']	
139	Segmento de Reta a4'	Segmento de Reta [B4', B3'] de Triângulo polígono4'	a4' = 0.17	SegmentodeReta[B4', B3', polígono4']	
140	Ponto B2'	B2 refletido a EixoY	B2' = (0.35, 1)	Reflexão[B2, EixoY]	
141	Ponto A3'	A3 refletido a EixoY	A3' = (0.44, 0)	Reflexão[A3, EixoY]	
142	Ponto B3' <sub>1</sub>	B3 refletido a EixoY	B3' <sub>1</sub> = (0.52, 1)	Reflexão[B3, EixoY]	
143	Triângulo polígono3'	Polígono B2', A3', B3'	polígono3' = 0.09	Polígono[B2', A3', B3',]	
143	Segmento de Reta b3' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B2', A3'] de Triângulo polígono3'	b3' <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B2', A3', polígono3']	
143	Segmento de Reta b2'	Segmento de Reta [A3', B3',] de Triângulo polígono3'	b2' = 1	SegmentodeReta[A3', B3', polígono3']	
143	Segmento de Reta a3'	Segmento de Reta [B3', B2'] de Triângulo polígono3'	a3' = 0.17	SegmentodeReta[B3', B2', polígono3']	
144	Ponto B1'	B1 refletido a EixoY	B1' = (0.17, 1)	Reflexão[B1, EixoY]	
145	Ponto A2'	A2 refletido a EixoY	A2' = (0.26, 0)	Reflexão[A2, EixoY]	
146	Ponto B2' <sub>1</sub>	B2 refletido a EixoY	B2' <sub>1</sub> = (0.35, 1)	Reflexão[B2, EixoY]	
147	Triângulo polígono2'	Polígono B1', A2', B2'	polígono2' = 0.09	Polígono[B1', A2', B2',]	
147	Segmento de Reta b2' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B1', A2'] de Triângulo polígono2'	b2' <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B1', A2', polígono2']	
147	Segmento de Reta b1'	Segmento de Reta [A2', B2',] de Triângulo polígono2'	b1' = 1	SegmentodeReta[A2', B2', polígono2']	
147	Segmento de Reta a2'	Segmento de Reta [B2', B1'] de Triângulo polígono2'	a2' = 0.17	SegmentodeReta[B2', B1', polígono2']	
148	Ponto B'	B refletido a EixoY	B' = (0, 1)	Reflexão[B, EixoY]	
149	Ponto A1'	A1 refletido a EixoY	A1' = (0.09, 0)	Reflexão[A1, EixoY]	
150	Ponto B1' <sub>1</sub>	B1 refletido a EixoY	B1' <sub>1</sub> = (0.17, 1)	Reflexão[B1, EixoY]	
151	Triângulo polígono1'	Polígono B', A1', B1'	polígono1' = 0.09	Polígono[B', A1', B1',]	
151	Segmento de Reta b1' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B', A1'] de Triângulo polígono1'	b1' <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B', A1', polígono1']	
151	Segmento de Reta b'	Segmento de Reta [A1', B1',] de Triângulo polígono1'	b' = 1	SegmentodeReta[A1', B1', polígono1']	
151	Segmento de Reta a1'	Segmento de Reta [B1', B'] de Triângulo polígono1'	a1' = 0.17	SegmentodeReta[B1', B', polígono1']	
152	Ponto E		E = (-3.14, 1.25)		
153	Ponto E'	E refletido a EixoY	E' = (3.14, 1.25)	Reflexão[E, EixoY]	
154	Ponto C	Ponto Médio de E, E'	C = (0, 1.25)	PontoMédio[E, E']	
155	Número legenda	Se[a < 1, a, 1]	legenda = 1	Se[a < 1, a, 1]	
156	Ponto D	C + legenda (E' - C)	D = (3.14, 1.25)	C + legenda (E' - C)	
157	Ponto F	C + legenda (E - C)	F = (-3.14, 1.25)	C + legenda (E - C)	
158	Ponto G		G = (3.3, 0)		
159	Ponto H		H = (3.3, 1)		
160	Ponto I	Ponto Médio de G, H	I = (3.3, 0.5)	PontoMédio[G, H]	
161	Ponto K	I + legenda (H - I)	K = (3.3, 1)	I + legenda (H - I)	
162	Ponto J	I + legenda (G - I)	J = (3.3, 0)	I + legenda (G - I)	
163	Vetor u	Vetor[C, F]	u = (-3.14, 0)	Vetor[C, F]	
164	Vetor v	Vetor[C, D]	v = (3.14, 0)	Vetor[C, D]	
165	Vetor w <sub>2</sub>	Vetor[I, K]	w <sub>2</sub> = (0, 0.5)	Vetor[I, K]	
166	Vetor z	Vetor[I, J]	z = (0, -0.5)	Vetor[I, J]	
167	Texto texto1		"2 π r"		
168	Texto texto2		"r"		
169	Ponto L	Ponto Médio de A1', B'	L = (0.04, 0.5)	PontoMédio[A1', B']	
170	Ponto C <sub>1</sub>	Imagem de B3' <sub>1</sub> na rotação de ângulo -Se[a > 1, ((a - 1) (180))°]	C <sub>1</sub> não definido(a)	Rotação[B3' <sub>1</sub> , -Se[a > 1, ((a - 1) (180))°], L]	
171	Ponto F <sub>1</sub>		F <sub>1</sub> = (-2.98, -0.12)		
172	Texto texto3		"π r"		



N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
173	Texto texto5		"Porque é que a fórmula do cálculo da área d...		
174	Texto texto6		"Esta construção pretende ilustrar a fórmula p...		
175	Texto texto7		"Considera o círculo de centro C e medida de ...		
176	Texto texto8		"Decompondo o círculo em n triângulos (com ...		
177	Texto texto9		" $\alpha = \frac{360}{n}$ "		
178	Textotexto10		"Neste caso consideraram-se 36 setores circ...		
179	Textotexto11		"Considera o diâmetro vertical, obtém-se entã...		
180	Textotexto12		"Vamos cortar o círculo nos setores que fora...		
181	Textotexto13		"Corta-se a figura no ponto B e faz-se uma rot...		
182	Textotexto14		"A figura geométrica que se obtém é um paral...		
183	Textotexto15		"Área_(Retângulo) = b x h = ( $\pi r$ ) x r = $\pi \times r^2$ "		
184	Número c		c = 1		
185	Booleano e <sub>2</sub>		e <sub>2</sub> = true		1.
186	Booleano f		f = true		Mostrar raio
187	Booleano g		g = true		Mostrar centro
188	Booleano h		h = true		2.
189	Botão botão1		botão1		Efetuar decomposição
190	Booleano i		i = true		Mostrar diâmetro
191	Booleano j		j = true		Mostrar pontos de interseção (B e D)
192	Booleano l		l = true		4.
193	Booleano m		m = true		5.
194	Booleano n		n = true		6.
195	Botão botão2		botão2		Efetuar abertura
196	Botão botão3		botão3		Anular decomposição
197	Botão botão4		botão4		Anular abertura
198	Botão botão5		botão5		Efetuar rotação
199	Botão botão6		botão6		Anular rotação
200	Botão botão7		botão7		Efetuar translação
201	Botão botão8		botão8		Anular translação
202	Texto texto4		"Então, como a área do retângulo se obtém m...		
203	Booleano o		o = true		7.
204	Ponto M	Ponto Médio de B, A1'	M = (0.04, 0.5)	PontoMédio[B, A1']	
205	Ponto B17"	Imagem de B17" na rotação de ângulo -(c 180)°	B17" = (-2.88, 0)	Rotação[B17', -(c 180)°, M]	
206	Ponto A18"	Imagem de A18" na rotação de ângulo -(c 180)°	A18" = (-2.98, 1)	Rotação[A18', -(c 180)°, M]	
207	Ponto B18"	Imagem de B18" na rotação de ângulo -(c 180)°	B18" = (-3.05, 0)	Rotação[B18', -(c 180)°, M]	
208	Triângulo polígono18"	Polígono B17", A18", B18"	polígono18" = 0.09	Polígono[B17", A18", B18"]	
208	Segmento de Reta b18"	Segmento de Reta [B17", A18"] de Triângulo polígono18"	b18" = 1	SegmentodeReta[B17", A18", polígono18"]	
208	Segmento de Reta b17"	Segmento de Reta [A18", B18"] de Triângulo polígono18"	b17" = 1	SegmentodeReta[A18", B18", polígono18"]	
208	Segmento de Reta a18"	Segmento de Reta [B18", B17"] de Triângulo polígono18"	a18" = 0.17	SegmentodeReta[B18", B17", polígono18"]	
209	Ponto B16"	Imagem de B16" na rotação de ângulo -(c 180)°	B16" = (-2.7, 0)	Rotação[B16', -(c 180)°, M]	
210	Ponto A17"	Imagem de A17" na rotação de ângulo -(c 180)°	A17" = (-2.79, 1)	Rotação[A17', -(c 180)°, M]	
211	Ponto N	Imagem de B17 <sub>1</sub> na rotação de ângulo -(c 180)°	N = (-2.88, 0)	Rotação[B17 <sub>1</sub> ', -(c 180)°, M]	
212	Triângulo polígono17"	Polígono B16", A17", N	polígono17" = 0.09	Polígono[B16", A17", N]	
212	Segmento de Reta n <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B16", A17"] de Triângulo polígono17"	n <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B16", A17", polígono17"]	
212	Segmento de Reta b16"	Segmento de Reta [A17", N] de Triângulo polígono17"	b16" = 1	SegmentodeReta[A17", N, polígono17"]	
212	Segmento de Reta a17"	Segmento de Reta [N, B16"] de Triângulo polígono17"	a17" = 0.17	SegmentodeReta[N, B16", polígono17"]	
213	Ponto B15"	Imagem de B15" na rotação de ângulo -(c 180)°	B15" = (-2.53, 0)	Rotação[B15', -(c 180)°, M]	
214	Ponto A16"	Imagem de A16" na rotação de ângulo -(c 180)°	A16" = (-2.61, 1)	Rotação[A16', -(c 180)°, M]	

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
215	Ponto O	Imagem de B16' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	O = (-2,7, 0)	Rotação[B16', -(c 180°), M]	
216	Triângulo polígono16"	Polígono B15', A16", O	polígono16" = 0.09	Polígono[B15', A16", O]	
216	Segmento de Reta $\alpha_1$	Segmento de Reta [B15', A16"] de Triângulo polígono16"	$\alpha_1 = 1$	SegmentodeReta[B15', A16", polígono16"]	
216	Segmento de Reta b15"	Segmento de Reta [A16", O] de Triângulo polígono16"	b15" = 1	SegmentodeReta[A16", O, polígono16"]	
216	Segmento de Reta a16"	Segmento de Reta [O, B15"] de Triângulo polígono16"	a16" = 0.17	SegmentodeReta[O, B15", polígono16"]	
217	Ponto B14"	Imagem de B14' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B14" = (-2,35, 0)	Rotação[B14', -(c 180°), M]	
218	Ponto A15"	Imagem de A15' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	A15" = (-2,44, 1)	Rotação[A15', -(c 180°), M]	
219	Ponto P	Imagem de B15' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	P = (-2,53, 0)	Rotação[B15', -(c 180°), M]	
220	Triângulo polígono15"	Polígono B14", A15", P	polígono15" = 0.09	Polígono[B14", A15", P]	
220	Segmento de Reta p	Segmento de Reta [B14", A15"] de Triângulo polígono15"	p = 1	SegmentodeReta[B14", A15", polígono15"]	
220	Segmento de Reta b14"	Segmento de Reta [A15", P] de Triângulo polígono15"	b14" = 1	SegmentodeReta[A15", P, polígono15"]	
220	Segmento de Reta a15"	Segmento de Reta [P, B14"] de Triângulo polígono15"	a15" = 0.17	SegmentodeReta[P, B14", polígono15"]	
221	Ponto B13"	Imagem de B13' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B13" = (-2,18, 0)	Rotação[B13', -(c 180°), M]	
222	Ponto A14"	Imagem de A14' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	A14" = (-2,27, 1)	Rotação[A14', -(c 180°), M]	
223	Ponto Q	Imagem de B14' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	Q = (-2,35, 0)	Rotação[B14', -(c 180°), M]	
224	Triângulo polígono14"	Polígono B13", A14", Q	polígono14" = 0.09	Polígono[B13", A14", Q]	
224	Segmento de Reta q	Segmento de Reta [B13", A14"] de Triângulo polígono14"	q = 1	SegmentodeReta[B13", A14", polígono14"]	
224	Segmento de Reta b13"	Segmento de Reta [A14", Q] de Triângulo polígono14"	b13" = 1	SegmentodeReta[A14", Q, polígono14"]	
224	Segmento de Reta a14"	Segmento de Reta [Q, B13"] de Triângulo polígono14"	a14" = 0.17	SegmentodeReta[Q, B13", polígono14"]	
225	Ponto B12"	Imagem de B12' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B12" = (-2, 0)	Rotação[B12', -(c 180°), M]	
226	Ponto A13"	Imagem de A13' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	A13" = (-2,09, 1)	Rotação[A13', -(c 180°), M]	
227	Ponto R	Imagem de B13' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	R = (-2,18, 0)	Rotação[B13', -(c 180°), M]	
228	Triângulo polígono13"	Polígono B12", A13", R	polígono13" = 0.09	Polígono[B12", A13", R]	
228	Segmento de Reta r	Segmento de Reta [B12", A13"] de Triângulo polígono13"	r = 1	SegmentodeReta[B12", A13", polígono13"]	
228	Segmento de Reta b12"	Segmento de Reta [A13", R] de Triângulo polígono13"	b12" = 1	SegmentodeReta[A13", R, polígono13"]	
228	Segmento de Reta a13"	Segmento de Reta [R, B12"] de Triângulo polígono13"	a13" = 0.17	SegmentodeReta[R, B12", polígono13"]	
229	Ponto B11"	Imagem de B11' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B11" = (-1,83, 0)	Rotação[B11', -(c 180°), M]	
230	Ponto A12"	Imagem de A12' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	A12" = (-1,92, 1)	Rotação[A12', -(c 180°), M]	
231	Ponto S	Imagem de B12' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	S = (-2, 0)	Rotação[B12', -(c 180°), M]	
232	Triângulo polígono12"	Polígono B11", A12", S	polígono12" = 0.09	Polígono[B11", A12", S]	
232	Segmento de Reta s	Segmento de Reta [B11", A12"] de Triângulo polígono12"	s = 1	SegmentodeReta[B11", A12", polígono12"]	
232	Segmento de Reta b11"	Segmento de Reta [A12", S] de Triângulo polígono12"	b11" = 1	SegmentodeReta[A12", S, polígono12"]	
232	Segmento de Reta a12"	Segmento de Reta [S, B11"] de Triângulo polígono12"	a12" = 0.17	SegmentodeReta[S, B11", polígono12"]	
233	Ponto B10"	Imagem de B10' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B10" = (-1,66, 0)	Rotação[B10', -(c 180°), M]	
234	Ponto A11"	Imagem de A11' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	A11" = (-1,74, 1)	Rotação[A11', -(c 180°), M]	
235	Ponto T	Imagem de B11' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	T = (-1,83, 0)	Rotação[B11', -(c 180°), M]	
236	Triângulo polígono11"	Polígono B10", A11", T	polígono11" = 0.09	Polígono[B10", A11", T]	
236	Segmento de Reta t	Segmento de Reta [B10", A11"] de Triângulo polígono11"	t = 1	SegmentodeReta[B10", A11", polígono11"]	
236	Segmento de Reta b10"	Segmento de Reta [A11", T] de Triângulo polígono11"	b10" = 1	SegmentodeReta[A11", T, polígono11"]	
236	Segmento de Reta a11"	Segmento de Reta [T, B10"] de Triângulo polígono11"	a11" = 0.17	SegmentodeReta[T, B10", polígono11"]	
237	Ponto U	Imagem de B10' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	U = (-1,66, 0)	Rotação[B10', -(c 180°), M]	
238	Ponto A10"	Imagem de A10' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	A10" = (-1,57, 1)	Rotação[A10', -(c 180°), M]	
239	Ponto B9"	Imagem de B9' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B9" = (-1,48, 0)	Rotação[B9', -(c 180°), M]	
240	Triângulo polígono10"	Polígono U, A10", B9"	polígono10" = 0.09	Polígono[U, A10", B9"]	
240	Segmento de Reta b9"	Segmento de Reta [U, A10"] de Triângulo polígono10"	b9" = 1	SegmentodeReta[U, A10", polígono10"]	
240	Segmento de Reta $u_1$	Segmento de Reta [A10", B9"] de Triângulo polígono10"	$u_1 = 1$	SegmentodeReta[A10", B9", polígono10"]	
240	Segmento de Reta a10"	Segmento de Reta [B9", U] de Triângulo polígono10"	a10" = 0.17	SegmentodeReta[B9", U, polígono10"]	
241	Ponto B8"	Imagem de B8' na rotação de ângulo $-(c 180^\circ)$	B8" = (-1,31, 0)	Rotação[B8', -(c 180°), M]	

N	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
242	Ponto A8"	Imagem de A8' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A8" = (-1.39, 1)	Rotação(A8', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
243	Ponto V	Imagem de B8' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	V = (-1.48, 0)	Rotação(B8', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
244	Triângulo polígono8"	Polígono B8", A8", V	polígono8" = 0.09	Polígono[B8", A8", V]	
244	Segmento de Reta v <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B8", A8"] de Triângulo polígono8"	v <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B8", V, polígono8"]	
244	Segmento de Reta b8"	Segmento de Reta [A8", V] de Triângulo polígono8"	b8" = 1	SegmentodeReta[A8", V, polígono8"]	
244	Segmento de Reta a9"	Segmento de Reta [V, B8"] de Triângulo polígono8"	a9" = 0.17	SegmentodeReta[V, B8", polígono8"]	
245	Ponto B7"	Imagem de B7' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B7" = (-1.13, 0)	Rotação(B7', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
246	Ponto A8"	Imagem de A8' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A8" = (-1.22, 1)	Rotação(A8', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
247	Ponto W	Imagem de B8' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	W = (-1.31, 0)	Rotação(B8', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
248	Triângulo polígono8"	Polígono B7", A8", W	polígono8" = 0.09	Polígono[B7", A8", W]	
248	Segmento de Reta w <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B7", A8"] de Triângulo polígono8"	w <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B7", A8", polígono8"]	
248	Segmento de Reta b7"	Segmento de Reta [A8", W] de Triângulo polígono8"	b7" = 1	SegmentodeReta[A8", W, polígono8"]	
248	Segmento de Reta a8"	Segmento de Reta [W, B7"] de Triângulo polígono8"	a8" = 0.17	SegmentodeReta[W, B7", polígono8"]	
249	Ponto B6"	Imagem de B6' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B6" = (-0.96, 0)	Rotação(B6', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
250	Ponto A7"	Imagem de A7' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A7" = (-1.05, 1)	Rotação(A7', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
251	Ponto Z	Imagem de B7' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	Z = (-1.13, 0)	Rotação(B7', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
252	Triângulo polígono7"	Polígono B6", A7", Z	polígono7" = 0.09	Polígono[B6", A7", Z]	
252	Segmento de Reta z <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B6", A7"] de Triângulo polígono7"	z <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B6", A7", polígono7"]	
252	Segmento de Reta b6"	Segmento de Reta [A7", Z] de Triângulo polígono7"	b6" = 1	SegmentodeReta[A7", Z, polígono7"]	
252	Segmento de Reta a7"	Segmento de Reta [Z, B6"] de Triângulo polígono7"	a7" = 0.17	SegmentodeReta[Z, B6", polígono7"]	
253	Ponto B5"	Imagem de B5' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B5" = (-0.78, 0)	Rotação(B5', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
254	Ponto A6"	Imagem de A6' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A6" = (-0.87, 1)	Rotação(A6', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
255	Ponto A <sub>1</sub>	Imagem de B6' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A <sub>1</sub> = (-0.96, 0)	Rotação(B6', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
256	Triângulo polígono6"	Polígono B5", A6", A <sub>1</sub>	polígono6" = 0.09	Polígono[B5", A6", A <sub>1</sub> ]	
256	Segmento de Reta a <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B5", A6"] de Triângulo polígono6"	a <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B5", A6", polígono6"]	
256	Segmento de Reta b5"	Segmento de Reta [A6", A <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono6"	b5" = 1	SegmentodeReta[A6", A <sub>1</sub> , polígono6"]	
256	Segmento de Reta a6"	Segmento de Reta [A <sub>1</sub> , B5"] de Triângulo polígono6"	a6" = 0.17	SegmentodeReta[A <sub>1</sub> , B5", polígono6"]	
257	Ponto B4"	Imagem de B4' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B4" = (-0.61, 0)	Rotação(B4', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
258	Ponto A5"	Imagem de A5' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A5" = (-0.7, 1)	Rotação(A5', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
259	Ponto B <sub>1</sub>	Imagem de B5' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B <sub>1</sub> = (-0.78, 0)	Rotação(B5', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
260	Triângulo polígono5"	Polígono B4", A5", B <sub>1</sub>	polígono5" = 0.09	Polígono[B4", A5", B <sub>1</sub> ]	
260	Segmento de Reta b <sub>2</sub>	Segmento de Reta [B4", A5"] de Triângulo polígono5"	b <sub>2</sub> = 1	SegmentodeReta[B4", A5", polígono5"]	
260	Segmento de Reta b4"	Segmento de Reta [A5", B <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono5"	b4" = 1	SegmentodeReta[A5", B <sub>1</sub> , polígono5"]	
260	Segmento de Reta a5"	Segmento de Reta [B <sub>1</sub> , B4"] de Triângulo polígono5"	a5" = 0.17	SegmentodeReta[B <sub>1</sub> , B4", polígono5"]	
261	Ponto B3"	Imagem de B3' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B3" = (-0.44, 0)	Rotação(B3', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
262	Ponto A4"	Imagem de A4' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A4" = (-0.52, 1)	Rotação(A4', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
263	Ponto D <sub>1</sub>	Imagem de B4' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	D <sub>1</sub> = (-0.61, 0)	Rotação(B4', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
264	Triângulo polígono4"	Polígono B3", A4", D <sub>1</sub>	polígono4" = 0.09	Polígono[B3", A4", D <sub>1</sub> ]	
264	Segmento de Reta d <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B3", A4"] de Triângulo polígono4"	d <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B3", A4", polígono4"]	
264	Segmento de Reta b3"	Segmento de Reta [A4", D <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono4"	b3" = 1	SegmentodeReta[A4", D <sub>1</sub> , polígono4"]	
264	Segmento de Reta a4"	Segmento de Reta [D <sub>1</sub> , B3"] de Triângulo polígono4"	a4" = 0.17	SegmentodeReta[D <sub>1</sub> , B3", polígono4"]	
265	Ponto B2"	Imagem de B2' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	B2" = (-0.26, 0)	Rotação(B2', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
266	Ponto A3"	Imagem de A3' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	A3" = (-0.35, 1)	Rotação(A3', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
267	Ponto E <sub>1</sub>	Imagem de B3' na rotação de ângulo $-(\angle 180^\circ)$	E <sub>1</sub> = (-0.44, 0)	Rotação(B3', $-(\angle 180^\circ)$ , M)	
268	Triângulo polígono3"	Polígono B2", A3", E <sub>1</sub>	polígono3" = 0.09	Polígono[B2", A3", E <sub>1</sub> ]	
268	Segmento de Reta e <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B2", A3"] de Triângulo polígono3"	e <sub>1</sub> = 1	SegmentodeReta[B2", A3", polígono3"]	

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
266	Segmento de Reta $b_2''$	Segmento de Reta $[A_3'', E_1]$ de Triângulo polígono3''	$b_2'' = 1$	SegmentodeReta[A3'', E <sub>1</sub> , polígono3'']	
268	Segmento de Reta $a_3''$	Segmento de Reta $[E_1, B_2'']$ de Triângulo polígono3''	$a_3'' = 0.17$	SegmentodeReta[E <sub>1</sub> , B2'', polígono3'']	
269	Ponto $B_1''$	Imagem de $B_1'$ na rotação de ângulo $-(c(180)^\circ)$	$B_1'' = (-0.09, 0)$	Rotação[B1', -(c(180)°), M]	
270	Ponto $A_2''$	Imagem de $A_2'$ na rotação de ângulo $-(c(180)^\circ)$	$A_2'' = (-0.17, 1)$	Rotação[A2', -(c(180)°), M]	
271	Ponto $G_1$	Imagem de $B_2'$ na rotação de ângulo $-(c(180)^\circ)$	$G_1 = (-0.26, 0)$	Rotação[B2', -(c(180)°), M]	
272	Triângulo polígono2''	Polígono $B_1'', A_2'', G_1$	polígono2'' = 0.09	Polígono[B1'', A2'', G <sub>1</sub> ]	
272	Segmento de Reta $g_1$	Segmento de Reta $[B_1'', A_2'']$ de Triângulo polígono2''	$g_1 = 1$	SegmentodeReta[B1'', A2'', polígono2'']	
272	Segmento de Reta $b_1''$	Segmento de Reta $[A_2'', G_1]$ de Triângulo polígono2''	$b_1'' = 1$	SegmentodeReta[A2'', G <sub>1</sub> , polígono2'']	
272	Segmento de Reta $a_2''$	Segmento de Reta $[G_1, B_1'']$ de Triângulo polígono2''	$a_2'' = 0.17$	SegmentodeReta[G <sub>1</sub> , B1'', polígono2'']	
273	Ponto $B''$	Imagem de $B'$ na rotação de ângulo $-(c(180)^\circ)$	$B'' = (0.09, 0)$	Rotação[B', -(c(180)°), M]	
274	Ponto $A_1''$	Imagem de $A_1'$ na rotação de ângulo $-(c(180)^\circ)$	$A_1'' = (0, 1)$	Rotação[A1', -(c(180)°), M]	
275	Ponto $H_1$	Imagem de $B_1'$ na rotação de ângulo $-(c(180)^\circ)$	$H_1 = (-0.09, 0)$	Rotação[B1', -(c(180)°), M]	
276	Triângulo polígono1''	Polígono $B'', A_1'', H_1$	polígono1'' = 0.09	Polígono[B'', A1'', H <sub>1</sub> ]	
276	Segmento de Reta $h_1$	Segmento de Reta $[B'', A_1'']$ de Triângulo polígono1''	$h_1 = 1$	SegmentodeReta[B'', A1'', polígono1'']	
276	Segmento de Reta $b''$	Segmento de Reta $[A_1'', H_1]$ de Triângulo polígono1''	$b'' = 1$	SegmentodeReta[A1'', H <sub>1</sub> , polígono1'']	
276	Segmento de Reta $a_1''$	Segmento de Reta $[H_1, B'']$ de Triângulo polígono1''	$a_1'' = 0.17$	SegmentodeReta[H <sub>1</sub> , B'', polígono1'']	
277	Reta $f_1$	Reta que contém B, A	$f_1: x = 0$	Reta[B, A]	
278	Ponto $I_1$	Pontos de Interseção de $c_2, f_1$	$I_1 = (0, 1)$	Interseção[c <sub>2</sub> , f <sub>1</sub> ]	
278	Ponto $J_1$	Pontos de Interseção de $c_2, f_1$	$J_1 = (0, -1)$	Interseção[c <sub>2</sub> , f <sub>1</sub> ]	
279	Segmento de Reta $c_1$	Segmento de Reta $[B, J_1]$	$c_1 = 2$	SegmentodeReta[B, J <sub>1</sub> ]	d
280	Ponto $K_1$	Pontos de Interseção de $a_1'', c_1$	$K_1 = (0, 0)$	Interseção[a1'', c <sub>1</sub> ]	
281	Triângulo polígono19	Polígono $A_1'', B'', K_1$	polígono19 = 0.04	Polígono[A1'', B'', K <sub>1</sub> ]	
281	Segmento de Reta $k_1$	Segmento de Reta $[A_1'', B'']$ de Triângulo polígono19	$k_1 = 1$	SegmentodeReta[A1'', B'', polígono19]	
281	Segmento de Reta $a_1''_1$	Segmento de Reta $[B'', K_1]$ de Triângulo polígono19	$a_1''_1 = 0.09$	SegmentodeReta[B'', K <sub>1</sub> , polígono19]	
281	Segmento de Reta $b''_1$	Segmento de Reta $[K_1, A_1'']$ de Triângulo polígono19	$b''_1 = 1$	SegmentodeReta[K <sub>1</sub> , A1'', polígono19]	
282	Triângulo polígono20	Polígono $A_1'', H_1, K_1$	polígono20 = 0.04	Polígono[A1'', H <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> ]	
282	Segmento de Reta $k_2$	Segmento de Reta $[A_1'', H_1]$ de Triângulo polígono20	$k_2 = 1$	SegmentodeReta[A1'', H <sub>1</sub> , polígono20]	
282	Segmento de Reta $a_1''_2$	Segmento de Reta $[H_1, K_1]$ de Triângulo polígono20	$a_1''_2 = 0.09$	SegmentodeReta[H <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> , polígono20]	
282	Segmento de Reta $h_2$	Segmento de Reta $[K_1, A_1'']$ de Triângulo polígono20	$h_2 = 1$	SegmentodeReta[K <sub>1</sub> , A1'', polígono20]	
283	Número e		$e = 1$		
284	Ponto $L_1$	$B'' - e(B'' - A_{18})$	$L_1 = (-3.05, 0)$	$B'' - e(B'' - A_{18})$	
285	Vetor w	Vetor $[B'', L_1]$	$w = (-3.14, 0)$	Vetor[B'', L <sub>1</sub> ]	
286	Ponto $A_1'''$	Translação de $A_1''$ por w	$A_1''' = (-3.14, 1)$	Translação[A1'', w]	
287	Ponto $B'''$	Translação de $B''$ por w	$B''' = (-3.05, 0)$	Translação[B'', w]	
288	Ponto $M_1$	Translação de $K_1$ por w	$M_1 = (-3.14, 0)$	Translação[K <sub>1</sub> , w]	
289	Triângulo polígono19'	Polígono $A_1''', B''', M_1$	polígono19' = 0.04	Polígono[A1''', B''', M <sub>1</sub> ]	
289	Segmento de Reta $m_1$	Segmento de Reta $[A_1''', B''']$ de Triângulo polígono19'	$m_1 = 1$	SegmentodeReta[A1''', B''', polígono19']	
289	Segmento de Reta $a_1'''$	Segmento de Reta $[B''', M_1]$ de Triângulo polígono19'	$a_1''' = 0.09$	SegmentodeReta[B''', M <sub>1</sub> , polígono19']	
289	Segmento de Reta $b'''$	Segmento de Reta $[M_1, A_1''']$ de Triângulo polígono19'	$b''' = 1$	SegmentodeReta[M <sub>1</sub> , A1''', polígono19']	
290	Circunferência $p_1$	Circunferência que contém B', com centro A	$p_1: x^2 + y^2 = 1$	Circunferência[A, B]	
291	Ponto $B''_1$	Imagem de $B'$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$B''_1 = (-0.17, 0.98)$	Rotação[B', 10°, A]	
292	Triângulo polígono21	Polígono $A, B'', B''_1$	polígono21 = 0.09	Polígono[A, B'', B'' <sub>1</sub> ]	
292	Segmento de Reta $b''_2$	Segmento de Reta $[A, B'']$ de Triângulo polígono21	$b''_2 = 1$	SegmentodeReta[A, B'', polígono21]	
292	Segmento de Reta $a_2$	Segmento de Reta $[B'', B''_1]$ de Triângulo polígono21	$a_2 = 0.17$	SegmentodeReta[B'', B'' <sub>1</sub> , polígono21]	
292	Segmento de Reta $b'_1$	Segmento de Reta $[B''_1, A]$ de Triângulo polígono21	$b'_1 = 1$	SegmentodeReta[B'' <sub>1</sub> , A, polígono21]	

Nº	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
293	Número $i_1$		$i_1 = 0.75$		
294	Ponto A'	Imagem de A na rotação de ângulo $10^\circ$	$A' = (0, 0)$	Rotação[A, $10^\circ$ , A]	
295	Ponto B' <sub>2</sub>	Imagem de B' na rotação de ângulo $10^\circ$	$B'_2 = (-0.17, 0.98)$	Rotação[B', $10^\circ$ , A]	
296	Ponto N <sub>1</sub>	Imagem de B' <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$N_1 = (-0.34, 0.94)$	Rotação[B' <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
297	Ponto A''	Imagem de A' na rotação de ângulo $10^\circ$	$A'' = (0, 0)$	Rotação[A', $10^\circ$ , A]	
298	Ponto O <sub>1</sub>	Imagem de B' <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$O_1 = (-0.34, 0.94)$	Rotação[B' <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
299	Ponto P <sub>1</sub>	Imagem de N <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$P_1 = (-0.5, 0.87)$	Rotação[N <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
300	Ponto A'''	Imagem de A'' na rotação de ângulo $10^\circ$	$A''' = (0, 0)$	Rotação[A'', $10^\circ$ , A]	
301	Ponto Q <sub>1</sub>	Imagem de O <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$Q_1 = (-0.5, 0.87)$	Rotação[O <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
302	Ponto R <sub>1</sub>	Imagem de P <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$R_1 = (-0.64, 0.77)$	Rotação[P <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
303	Ponto S <sub>1</sub>	Imagem de A''' na rotação de ângulo $10^\circ$	$S_1 = (0, 0)$	Rotação[A''', $10^\circ$ , A]	
304	Ponto T <sub>1</sub>	Imagem de Q <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$T_1 = (-0.64, 0.77)$	Rotação[Q <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
305	Ponto U <sub>1</sub>	Imagem de R <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$U_1 = (-0.77, 0.64)$	Rotação[R <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
306	Ponto V <sub>1</sub>	Imagem de A''' na rotação de ângulo $10^\circ$	$V_1 = (0, 0)$	Rotação[A''', $10^\circ$ , A]	
307	Ponto W <sub>1</sub>	Imagem de Q <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$W_1 = (-0.64, 0.77)$	Rotação[Q <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
308	Ponto Z <sub>1</sub>	Imagem de R <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$Z_1 = (-0.77, 0.64)$	Rotação[R <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
309	Ponto A <sub>2</sub>	Imagem de S <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$A_2 = (0, 0)$	Rotação[S <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
310	Ponto B <sub>2</sub>	Imagem de T <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$B_2 = (-0.77, 0.64)$	Rotação[T <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
311	Ponto C <sub>2</sub>	Imagem de U <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$C_2 = (-0.87, 0.5)$	Rotação[U <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
312	Ponto A' <sub>1</sub>	Imagem de A na rotação de ângulo $10^\circ$	$A'_1 = (0, 0)$	Rotação[A, $10^\circ$ , A]	
313	Ponto B' <sub>3</sub>	Imagem de B' na rotação de ângulo $10^\circ$	$B'_3 = (-0.17, 0.98)$	Rotação[B', $10^\circ$ , A]	
314	Ponto D <sub>2</sub>	Imagem de B' <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$D_2 = (-0.34, 0.94)$	Rotação[B' <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
315	Triângulo polígono21'	Polígono A' <sub>1</sub> , B' <sub>3</sub> , D <sub>2</sub>	polígono21' = 0.09	Polígono[A' <sub>1</sub> , B' <sub>3</sub> , D <sub>2</sub> ]	
315	Segmento de Reta d <sub>2</sub>	Segmento de Reta [A' <sub>1</sub> , B' <sub>3</sub> ] de Triângulo polígono21'	$d_2 = 1$	SegmentodeReta[A' <sub>1</sub> , B' <sub>3</sub> , polígono21']	
315	Segmento de Reta a' <sub>1</sub>	Segmento de Reta [B' <sub>3</sub> , D <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21'	$a'_1 = 0.17$	SegmentodeReta[B' <sub>3</sub> , D <sub>2</sub> , polígono21']	
315	Segmento de Reta b' <sub>3</sub>	Segmento de Reta [D <sub>2</sub> , A' <sub>1</sub> ] de Triângulo polígono21'	$b'_3 = 1$	SegmentodeReta[D <sub>2</sub> , A' <sub>1</sub> , polígono21']	
316	Ponto E <sub>2</sub>	Imagem de A' <sub>1</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$E_2 = (0, 0)$	Rotação[A' <sub>1</sub> , $10^\circ$ , A]	
317	Ponto F <sub>2</sub>	Imagem de B' <sub>3</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$F_2 = (-0.34, 0.94)$	Rotação[B' <sub>3</sub> , $10^\circ$ , A]	
318	Ponto G <sub>2</sub>	Imagem de D <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$G_2 = (-0.5, 0.87)$	Rotação[D <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
319	Triângulo polígono21''	Polígono E <sub>2</sub> , F <sub>2</sub> , G <sub>2</sub>	polígono21'' = 0.09	Polígono[E <sub>2</sub> , F <sub>2</sub> , G <sub>2</sub> ]	
319	Segmento de Reta g <sub>2</sub>	Segmento de Reta [E <sub>2</sub> , F <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21''	$g_2 = 1$	SegmentodeReta[E <sub>2</sub> , F <sub>2</sub> , polígono21'']	
319	Segmento de Reta e <sub>3</sub>	Segmento de Reta [F <sub>2</sub> , G <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21''	$e_3 = 0.17$	SegmentodeReta[F <sub>2</sub> , G <sub>2</sub> , polígono21'']	
319	Segmento de Reta f <sub>2</sub>	Segmento de Reta [G <sub>2</sub> , E <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21''	$f_2 = 1$	SegmentodeReta[G <sub>2</sub> , E <sub>2</sub> , polígono21'']	
320	Ponto H <sub>2</sub>	Imagem de E <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$H_2 = (0, 0)$	Rotação[E <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
321	Ponto I <sub>2</sub>	Imagem de F <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$I_2 = (-0.5, 0.87)$	Rotação[F <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
322	Ponto J <sub>2</sub>	Imagem de G <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$J_2 = (-0.64, 0.77)$	Rotação[G <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
323	Triângulo polígono21'''	Polígono H <sub>2</sub> , I <sub>2</sub> , J <sub>2</sub>	polígono21''' = 0.09	Polígono[H <sub>2</sub> , I <sub>2</sub> , J <sub>2</sub> ]	
323	Segmento de Reta j <sub>2</sub>	Segmento de Reta [H <sub>2</sub> , I <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21'''	$j_2 = 1$	SegmentodeReta[H <sub>2</sub> , I <sub>2</sub> , polígono21''']	
323	Segmento de Reta h <sub>3</sub>	Segmento de Reta [I <sub>2</sub> , J <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21'''	$h_3 = 0.17$	SegmentodeReta[I <sub>2</sub> , J <sub>2</sub> , polígono21''']	
323	Segmento de Reta i <sub>2</sub>	Segmento de Reta [J <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> ] de Triângulo polígono21'''	$i_2 = 1$	SegmentodeReta[J <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> , polígono21''']	
324	Ponto K <sub>2</sub>	Imagem de H <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$K_2 = (0, 0)$	Rotação[H <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
325	Ponto L <sub>2</sub>	Imagem de I <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$L_2 = (-0.64, 0.77)$	Rotação[I <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
326	Ponto M <sub>2</sub>	Imagem de J <sub>2</sub> na rotação de ângulo $10^\circ$	$M_2 = (-0.77, 0.64)$	Rotação[J <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
327	Triângulo polígono22	Polígono K <sub>2</sub> , L <sub>2</sub> , M <sub>2</sub>	polígono22 = 0.09	Polígono[K <sub>2</sub> , L <sub>2</sub> , M <sub>2</sub> ]	

N	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
327	Segmento de Reta $m_2$	Segmento de Reta $[K_2, L_2]$ de Triângulo polígono22	$m_2 = 1$	SegmentodeReta[K <sub>2</sub> , L <sub>2</sub> , polígono22]	
327	Segmento de Reta $k_3$	Segmento de Reta $[L_2, M_2]$ de Triângulo polígono22	$k_3 = 0.17$	SegmentodeReta[L <sub>2</sub> , M <sub>2</sub> , polígono22]	
327	Segmento de Reta $l_2$	Segmento de Reta $[M_2, K_2]$ de Triângulo polígono22	$l_2 = 1$	SegmentodeReta[M <sub>2</sub> , K <sub>2</sub> , polígono22]	
328	Ponto $N_2$	Imagem de $K_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$N_2 = (0, 0)$	Rotação[K <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
329	Ponto $O_2$	Imagem de $L_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$O_2 = (-0.77, 0.84)$	Rotação[L <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
330	Ponto $P_2$	Imagem de $M_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$P_2 = (-0.87, 0.5)$	Rotação[M <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
331	Triângulo polígono22'	Polígono $N_2, O_2, P_2$	polígono22' = 0.09	Polígono[N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , P <sub>2</sub> ]	
331	Segmento de Reta $p_2$	Segmento de Reta $[N_2, O_2]$ de Triângulo polígono22'	$p_2 = 1$	SegmentodeReta[N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , polígono22']	
331	Segmento de Reta $n_2$	Segmento de Reta $[O_2, P_2]$ de Triângulo polígono22'	$n_2 = 0.17$	SegmentodeReta[O <sub>2</sub> , P <sub>2</sub> , polígono22']	
331	Segmento de Reta $o_2$	Segmento de Reta $[P_2, N_2]$ de Triângulo polígono22'	$o_2 = 1$	SegmentodeReta[P <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , polígono22']	
332	Ponto $Q_2$	Imagem de $N_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$Q_2 = (0, 0)$	Rotação[N <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
333	Ponto $R_2$	Imagem de $O_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$R_2 = (-0.87, 0.5)$	Rotação[O <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
334	Ponto $S_2$	Imagem de $P_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$S_2 = (-0.94, 0.34)$	Rotação[P <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
335	Triângulo polígono22''	Polígono $Q_2, R_2, S_2$	polígono22'' = 0.09	Polígono[Q <sub>2</sub> , R <sub>2</sub> , S <sub>2</sub> ]	
335	Segmento de Reta $s_2$	Segmento de Reta $[Q_2, R_2]$ de Triângulo polígono22''	$s_2 = 1$	SegmentodeReta[Q <sub>2</sub> , R <sub>2</sub> , polígono22'']	
335	Segmento de Reta $q_2$	Segmento de Reta $[R_2, S_2]$ de Triângulo polígono22''	$q_2 = 0.17$	SegmentodeReta[R <sub>2</sub> , S <sub>2</sub> , polígono22'']	
335	Segmento de Reta $r_2$	Segmento de Reta $[S_2, Q_2]$ de Triângulo polígono22''	$r_2 = 1$	SegmentodeReta[S <sub>2</sub> , Q <sub>2</sub> , polígono22'']	
336	Ponto $T_2$	Imagem de $Q_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$T_2 = (0, 0)$	Rotação[Q <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
337	Ponto $U_2$	Imagem de $R_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$U_2 = (-0.94, 0.34)$	Rotação[R <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
338	Ponto $V_2$	Imagem de $S_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$V_2 = (-0.98, 0.17)$	Rotação[S <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
339	Triângulo polígono22'''	Polígono $T_2, U_2, V_2$	polígono22''' = 0.09	Polígono[T <sub>2</sub> , U <sub>2</sub> , V <sub>2</sub> ]	
339	Segmento de Reta $v_2$	Segmento de Reta $[T_2, U_2]$ de Triângulo polígono22'''	$v_2 = 1$	SegmentodeReta[T <sub>2</sub> , U <sub>2</sub> , polígono22''']	
339	Segmento de Reta $t_2$	Segmento de Reta $[U_2, V_2]$ de Triângulo polígono22'''	$t_2 = 0.17$	SegmentodeReta[U <sub>2</sub> , V <sub>2</sub> , polígono22''']	
339	Segmento de Reta $u_2$	Segmento de Reta $[V_2, T_2]$ de Triângulo polígono22'''	$u_2 = 1$	SegmentodeReta[V <sub>2</sub> , T <sub>2</sub> , polígono22''']	
340	Ponto $W_2$	Imagem de $T_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$W_2 = (0, 0)$	Rotação[T <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
341	Ponto $Z_2$	Imagem de $U_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$Z_2 = (-0.98, 0.17)$	Rotação[U <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
342	Ponto $A_3$	Imagem de $V_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$A_3 = (-1, 0)$	Rotação[V <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
343	Triângulo polígono23	Polígono $W_2, Z_2, A_3$	polígono23 = 0.09	Polígono[W <sub>2</sub> , Z <sub>2</sub> , A <sub>3</sub> ]	
343	Segmento de Reta $a_3$	Segmento de Reta $[W_2, Z_2]$ de Triângulo polígono23	$a_3 = 1$	SegmentodeReta[W <sub>2</sub> , Z <sub>2</sub> , polígono23]	
343	Segmento de Reta $w_3$	Segmento de Reta $[Z_2, A_3]$ de Triângulo polígono23	$w_3 = 0.17$	SegmentodeReta[Z <sub>2</sub> , A <sub>3</sub> , polígono23]	
343	Segmento de Reta $z_2$	Segmento de Reta $[A_3, W_2]$ de Triângulo polígono23	$z_2 = 1$	SegmentodeReta[A <sub>3</sub> , W <sub>2</sub> , polígono23]	
344	Ponto $B_3$	Imagem de $W_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$B_3 = (0, 0)$	Rotação[W <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
345	Ponto $C_3$	Imagem de $Z_2$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$C_3 = (-1, 0)$	Rotação[Z <sub>2</sub> , $10^\circ$ , A]	
346	Ponto $D_3$	Imagem de $A_3$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$D_3 = (-0.98, -0.17)$	Rotação[A <sub>3</sub> , $10^\circ$ , A]	
347	Triângulo polígono23'	Polígono $B_3, C_3, D_3$	polígono23' = 0.09	Polígono[B <sub>3</sub> , C <sub>3</sub> , D <sub>3</sub> ]	
347	Segmento de Reta $d_3$	Segmento de Reta $[B_3, C_3]$ de Triângulo polígono23'	$d_3 = 1$	SegmentodeReta[B <sub>3</sub> , C <sub>3</sub> , polígono23']	
347	Segmento de Reta $b_3$	Segmento de Reta $[C_3, D_3]$ de Triângulo polígono23'	$b_3 = 0.17$	SegmentodeReta[C <sub>3</sub> , D <sub>3</sub> , polígono23']	
347	Segmento de Reta $c_3$	Segmento de Reta $[D_3, B_3]$ de Triângulo polígono23'	$c_3 = 1$	SegmentodeReta[D <sub>3</sub> , B <sub>3</sub> , polígono23']	
348	Ponto $E_3$	Imagem de $B_3$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$E_3 = (0, 0)$	Rotação[B <sub>3</sub> , $10^\circ$ , A]	
349	Ponto $F_3$	Imagem de $C_3$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$F_3 = (-0.98, -0.17)$	Rotação[C <sub>3</sub> , $10^\circ$ , A]	
350	Ponto $G_3$	Imagem de $D_3$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$G_3 = (-0.94, -0.34)$	Rotação[D <sub>3</sub> , $10^\circ$ , A]	
351	Triângulo polígono23''	Polígono $E_3, F_3, G_3$	polígono23'' = 0.09	Polígono[E <sub>3</sub> , F <sub>3</sub> , G <sub>3</sub> ]	
351	Segmento de Reta $g_3$	Segmento de Reta $[E_3, F_3]$ de Triângulo polígono23''	$g_3 = 1$	SegmentodeReta[E <sub>3</sub> , F <sub>3</sub> , polígono23'']	
351	Segmento de Reta $e_4$	Segmento de Reta $[F_3, G_3]$ de Triângulo polígono23''	$e_4 = 0.17$	SegmentodeReta[F <sub>3</sub> , G <sub>3</sub> , polígono23'']	

N	Título	Definição	Valor	Comando	Legenda
351	Segmento de Reta $f_3$	Segmento de Reta $[G_3, E_3]$ de Triângulo polígono23"	$f_3 = 1$	SegmentodeReta[G <sub>3</sub> , E <sub>3</sub> , polígono23"]	
352	Ponto $H_3$	Imagem de $E_3$ na rotação de ângulo 10°	$H_3 = (0, 0)$	Rotação[E <sub>3</sub> , 10°, A]	
353	Ponto $I_3$	Imagem de $F_3$ na rotação de ângulo 10°	$I_3 = (-0.94, -0.34)$	Rotação[F <sub>3</sub> , 10°, A]	
354	Ponto $J_3$	Imagem de $G_3$ na rotação de ângulo 10°	$J_3 = (-0.87, -0.5)$	Rotação[G <sub>3</sub> , 10°, A]	
355	Triângulo polígono23"	Polígono $H_3, I_3, J_3$	polígono23" = 0.09	Polígono[H <sub>3</sub> , I <sub>3</sub> , J <sub>3</sub> ]	
355	Segmento de Reta $l_3$	Segmento de Reta $[H_3, I_3]$ de Triângulo polígono23"	$l_3 = 1$	SegmentodeReta[H <sub>3</sub> , I <sub>3</sub> , polígono23"]	
355	Segmento de Reta $h_4$	Segmento de Reta $[I_3, J_3]$ de Triângulo polígono23"	$h_4 = 0.17$	SegmentodeReta[I <sub>3</sub> , J <sub>3</sub> , polígono23"]	
355	Segmento de Reta $i_3$	Segmento de Reta $[J_3, H_3]$ de Triângulo polígono23"	$i_3 = 1$	SegmentodeReta[J <sub>3</sub> , H <sub>3</sub> , polígono23"]	
356	Ponto $K_3$	Imagem de $H_3$ na rotação de ângulo 10°	$K_3 = (0, 0)$	Rotação[H <sub>3</sub> , 10°, A]	
357	Ponto $L_3$	Imagem de $I_3$ na rotação de ângulo 10°	$L_3 = (-0.87, -0.5)$	Rotação[I <sub>3</sub> , 10°, A]	
358	Ponto $M_3$	Imagem de $J_3$ na rotação de ângulo 10°	$M_3 = (-0.77, -0.64)$	Rotação[J <sub>3</sub> , 10°, A]	
359	Triângulo polígono24	Polígono $K_3, L_3, M_3$	polígono24 = 0.09	Polígono[K <sub>3</sub> , L <sub>3</sub> , M <sub>3</sub> ]	
359	Segmento de Reta $m_3$	Segmento de Reta $[K_3, L_3]$ de Triângulo polígono24	$m_3 = 1$	SegmentodeReta[K <sub>3</sub> , L <sub>3</sub> , polígono24]	
359	Segmento de Reta $k_4$	Segmento de Reta $[L_3, M_3]$ de Triângulo polígono24	$k_4 = 0.17$	SegmentodeReta[L <sub>3</sub> , M <sub>3</sub> , polígono24]	
359	Segmento de Reta $l_3$	Segmento de Reta $[M_3, K_3]$ de Triângulo polígono24	$l_3 = 1$	SegmentodeReta[M <sub>3</sub> , K <sub>3</sub> , polígono24]	
360	Ponto $N_3$	Imagem de $K_3$ na rotação de ângulo 10°	$N_3 = (0, 0)$	Rotação[K <sub>3</sub> , 10°, A]	
361	Ponto $O_3$	Imagem de $L_3$ na rotação de ângulo 10°	$O_3 = (-0.77, -0.64)$	Rotação[L <sub>3</sub> , 10°, A]	
362	Ponto $P_3$	Imagem de $M_3$ na rotação de ângulo 10°	$P_3 = (-0.64, -0.77)$	Rotação[M <sub>3</sub> , 10°, A]	
363	Triângulo polígono24'	Polígono $N_3, O_3, P_3$	polígono24' = 0.09	Polígono[N <sub>3</sub> , O <sub>3</sub> , P <sub>3</sub> ]	
363	Segmento de Reta $p_3$	Segmento de Reta $[N_3, O_3]$ de Triângulo polígono24'	$p_3 = 1$	SegmentodeReta[N <sub>3</sub> , O <sub>3</sub> , polígono24']	
363	Segmento de Reta $n_3$	Segmento de Reta $[O_3, P_3]$ de Triângulo polígono24'	$n_3 = 0.17$	SegmentodeReta[O <sub>3</sub> , P <sub>3</sub> , polígono24']	
363	Segmento de Reta $o_3$	Segmento de Reta $[P_3, N_3]$ de Triângulo polígono24'	$o_3 = 1$	SegmentodeReta[P <sub>3</sub> , N <sub>3</sub> , polígono24']	
364	Ponto $Q_3$	Imagem de $N_3$ na rotação de ângulo 10°	$Q_3 = (0, 0)$	Rotação[N <sub>3</sub> , 10°, A]	
365	Ponto $R_3$	Imagem de $O_3$ na rotação de ângulo 10°	$R_3 = (-0.64, -0.77)$	Rotação[O <sub>3</sub> , 10°, A]	
366	Ponto $S_3$	Imagem de $P_3$ na rotação de ângulo 10°	$S_3 = (-0.5, -0.87)$	Rotação[P <sub>3</sub> , 10°, A]	
367	Triângulo polígono24"	Polígono $Q_3, R_3, S_3$	polígono24" = 0.09	Polígono[Q <sub>3</sub> , R <sub>3</sub> , S <sub>3</sub> ]	
367	Segmento de Reta $s_3$	Segmento de Reta $[Q_3, R_3]$ de Triângulo polígono24"	$s_3 = 1$	SegmentodeReta[Q <sub>3</sub> , R <sub>3</sub> , polígono24"]	
367	Segmento de Reta $q_3$	Segmento de Reta $[R_3, S_3]$ de Triângulo polígono24"	$q_3 = 0.17$	SegmentodeReta[R <sub>3</sub> , S <sub>3</sub> , polígono24"]	
367	Segmento de Reta $r_3$	Segmento de Reta $[S_3, Q_3]$ de Triângulo polígono24"	$r_3 = 1$	SegmentodeReta[S <sub>3</sub> , Q <sub>3</sub> , polígono24"]	
368	Ponto $T_3$	Imagem de $Q_3$ na rotação de ângulo 10°	$T_3 = (0, 0)$	Rotação[Q <sub>3</sub> , 10°, A]	
369	Ponto $U_3$	Imagem de $R_3$ na rotação de ângulo 10°	$U_3 = (-0.5, -0.87)$	Rotação[R <sub>3</sub> , 10°, A]	
370	Ponto $V_3$	Imagem de $S_3$ na rotação de ângulo 10°	$V_3 = (-0.34, -0.94)$	Rotação[S <sub>3</sub> , 10°, A]	
371	Triângulo polígono24"	Polígono $T_3, U_3, V_3$	polígono24" = 0.09	Polígono[T <sub>3</sub> , U <sub>3</sub> , V <sub>3</sub> ]	
371	Segmento de Reta $v_3$	Segmento de Reta $[T_3, U_3]$ de Triângulo polígono24"	$v_3 = 1$	SegmentodeReta[T <sub>3</sub> , U <sub>3</sub> , polígono24"]	
371	Segmento de Reta $t_3$	Segmento de Reta $[U_3, V_3]$ de Triângulo polígono24"	$t_3 = 0.17$	SegmentodeReta[U <sub>3</sub> , V <sub>3</sub> , polígono24"]	
371	Segmento de Reta $u_3$	Segmento de Reta $[V_3, T_3]$ de Triângulo polígono24"	$u_3 = 1$	SegmentodeReta[V <sub>3</sub> , T <sub>3</sub> , polígono24"]	
372	Ponto $W_3$	Imagem de $T_3$ na rotação de ângulo 10°	$W_3 = (0, 0)$	Rotação[T <sub>3</sub> , 10°, A]	
373	Ponto $Z_3$	Imagem de $U_3$ na rotação de ângulo 10°	$Z_3 = (-0.34, -0.94)$	Rotação[U <sub>3</sub> , 10°, A]	
374	Ponto $A_4$	Imagem de $V_3$ na rotação de ângulo 10°	$A_4 = (-0.17, -0.98)$	Rotação[V <sub>3</sub> , 10°, A]	
375	Triângulo polígono25	Polígono $W_3, Z_3, A_4$	polígono25 = 0.09	Polígono[W <sub>3</sub> , Z <sub>3</sub> , A <sub>4</sub> ]	
375	Segmento de Reta $a_4$	Segmento de Reta $[W_3, Z_3]$ de Triângulo polígono25	$a_4 = 1$	SegmentodeReta[W <sub>3</sub> , Z <sub>3</sub> , polígono25]	
375	Segmento de Reta $w_4$	Segmento de Reta $[Z_3, A_4]$ de Triângulo polígono25	$w_4 = 0.17$	SegmentodeReta[Z <sub>3</sub> , A <sub>4</sub> , polígono25]	
375	Segmento de Reta $z_3$	Segmento de Reta $[A_4, W_3]$ de Triângulo polígono25	$z_3 = 1$	SegmentodeReta[A <sub>4</sub> , W <sub>3</sub> , polígono25]	
376	Ponto $B_4$	Imagem de $W_3$ na rotação de ângulo 10°	$B_4 = (0, 0)$	Rotação[W <sub>3</sub> , 10°, A]	

N	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
377	Ponto $C_4$	Imagem de $Z_3$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$C_4 = (-0.17, -0.98)$	Rotação( $Z_3$ , $10^\circ$ , A)	
378	Ponto $D_4$	Imagem de $A_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$D_4 = (0, -1)$	Rotação( $A_4$ , $10^\circ$ , A)	
379	Triângulo polígono25'	Polígono $B_4, C_4, D_4$	polígono25' = 0.09	Polígono( $B_4, C_4, D_4$ )	
379	Segmento de Reta $d_4$	Segmento de Reta $[B_4, C_4]$ de Triângulo polígono25'	$d_4 = 1$	SegmentodeReta( $B_4, C_4$ , polígono25')	
379	Segmento de Reta $b_4$	Segmento de Reta $[C_4, D_4]$ de Triângulo polígono25'	$b_4 = 0.17$	SegmentodeReta( $C_4, D_4$ , polígono25')	
379	Segmento de Reta $c_4$	Segmento de Reta $[D_4, B_4]$ de Triângulo polígono25'	$c_4 = 1$	SegmentodeReta( $D_4, B_4$ , polígono25')	
380	Ponto $E_4$	Imagem de $B_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$E_4 = (0, 0)$	Rotação( $B_4$ , $10^\circ$ , A)	
381	Ponto $F_4$	Imagem de $C_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$F_4 = (0, -1)$	Rotação( $C_4$ , $10^\circ$ , A)	
382	Ponto $G_4$	Imagem de $D_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$G_4 = (0.17, -0.98)$	Rotação( $D_4$ , $10^\circ$ , A)	
383	Triângulo polígono25"	Polígono $E_4, F_4, G_4$	polígono25" = 0.09	Polígono( $E_4, F_4, G_4$ )	
383	Segmento de Reta $g_4$	Segmento de Reta $[E_4, F_4]$ de Triângulo polígono25"	$g_4 = 1$	SegmentodeReta( $E_4, F_4$ , polígono25")	
383	Segmento de Reta $e_5$	Segmento de Reta $[F_4, G_4]$ de Triângulo polígono25"	$e_5 = 0.17$	SegmentodeReta( $F_4, G_4$ , polígono25")	
383	Segmento de Reta $f_4$	Segmento de Reta $[G_4, E_4]$ de Triângulo polígono25"	$f_4 = 1$	SegmentodeReta( $G_4, E_4$ , polígono25")	
384	Ponto $H_4$	Imagem de $E_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$H_4 = (0, 0)$	Rotação( $E_4$ , $10^\circ$ , A)	
385	Ponto $I_4$	Imagem de $F_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$I_4 = (0.17, -0.98)$	Rotação( $F_4$ , $10^\circ$ , A)	
386	Ponto $J_4$	Imagem de $G_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$J_4 = (0.34, -0.94)$	Rotação( $G_4$ , $10^\circ$ , A)	
387	Triângulo polígono25"	Polígono $H_4, I_4, J_4$	polígono25" = 0.09	Polígono( $H_4, I_4, J_4$ )	
387	Segmento de Reta $j_4$	Segmento de Reta $[H_4, I_4]$ de Triângulo polígono25"	$j_4 = 1$	SegmentodeReta( $H_4, I_4$ , polígono25")	
387	Segmento de Reta $h_5$	Segmento de Reta $[I_4, J_4]$ de Triângulo polígono25"	$h_5 = 0.17$	SegmentodeReta( $I_4, J_4$ , polígono25")	
387	Segmento de Reta $i_4$	Segmento de Reta $[J_4, H_4]$ de Triângulo polígono25"	$i_4 = 1$	SegmentodeReta( $J_4, H_4$ , polígono25")	
388	Ponto $K_4$	Imagem de $H_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$K_4 = (0, 0)$	Rotação( $H_4$ , $10^\circ$ , A)	
389	Ponto $L_4$	Imagem de $I_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$L_4 = (0.34, -0.94)$	Rotação( $I_4$ , $10^\circ$ , A)	
390	Ponto $M_4$	Imagem de $J_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$M_4 = (0.5, -0.87)$	Rotação( $J_4$ , $10^\circ$ , A)	
391	Triângulo polígono26	Polígono $K_4, L_4, M_4$	polígono26 = 0.09	Polígono( $K_4, L_4, M_4$ )	
391	Segmento de Reta $m_4$	Segmento de Reta $[K_4, L_4]$ de Triângulo polígono26	$m_4 = 1$	SegmentodeReta( $K_4, L_4$ , polígono26)	
391	Segmento de Reta $k_5$	Segmento de Reta $[L_4, M_4]$ de Triângulo polígono26	$k_5 = 0.17$	SegmentodeReta( $L_4, M_4$ , polígono26)	
391	Segmento de Reta $l_4$	Segmento de Reta $[M_4, K_4]$ de Triângulo polígono26	$l_4 = 1$	SegmentodeReta( $M_4, K_4$ , polígono26)	
392	Ponto $N_4$	Imagem de $K_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$N_4 = (0, 0)$	Rotação( $K_4$ , $10^\circ$ , A)	
393	Ponto $O_4$	Imagem de $L_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$O_4 = (0.5, -0.87)$	Rotação( $L_4$ , $10^\circ$ , A)	
394	Ponto $P_4$	Imagem de $M_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$P_4 = (0.64, -0.77)$	Rotação( $M_4$ , $10^\circ$ , A)	
395	Triângulo polígono26'	Polígono $N_4, O_4, P_4$	polígono26' = 0.09	Polígono( $N_4, O_4, P_4$ )	
395	Segmento de Reta $p_4$	Segmento de Reta $[N_4, O_4]$ de Triângulo polígono26'	$p_4 = 1$	SegmentodeReta( $N_4, O_4$ , polígono26')	
395	Segmento de Reta $n_4$	Segmento de Reta $[O_4, P_4]$ de Triângulo polígono26'	$n_4 = 0.17$	SegmentodeReta( $O_4, P_4$ , polígono26')	
395	Segmento de Reta $o_4$	Segmento de Reta $[P_4, N_4]$ de Triângulo polígono26'	$o_4 = 1$	SegmentodeReta( $P_4, N_4$ , polígono26')	
396	Ponto $Q_4$	Imagem de $N_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$Q_4 = (0, 0)$	Rotação( $N_4$ , $10^\circ$ , A)	
397	Ponto $R_4$	Imagem de $O_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$R_4 = (0.64, -0.77)$	Rotação( $O_4$ , $10^\circ$ , A)	
398	Ponto $S_4$	Imagem de $P_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$S_4 = (0.77, -0.64)$	Rotação( $P_4$ , $10^\circ$ , A)	
399	Triângulo polígono26"	Polígono $Q_4, R_4, S_4$	polígono26" = 0.09	Polígono( $Q_4, R_4, S_4$ )	
399	Segmento de Reta $s_4$	Segmento de Reta $[Q_4, R_4]$ de Triângulo polígono26"	$s_4 = 1$	SegmentodeReta( $Q_4, R_4$ , polígono26")	
399	Segmento de Reta $q_4$	Segmento de Reta $[R_4, S_4]$ de Triângulo polígono26"	$q_4 = 0.17$	SegmentodeReta( $R_4, S_4$ , polígono26")	
399	Segmento de Reta $r_4$	Segmento de Reta $[S_4, Q_4]$ de Triângulo polígono26"	$r_4 = 1$	SegmentodeReta( $S_4, Q_4$ , polígono26")	
400	Ponto $T_4$	Imagem de $Q_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$T_4 = (0, 0)$	Rotação( $Q_4$ , $10^\circ$ , A)	
401	Ponto $U_4$	Imagem de $R_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$U_4 = (0.77, -0.64)$	Rotação( $R_4$ , $10^\circ$ , A)	
402	Ponto $V_4$	Imagem de $S_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$V_4 = (0.87, -0.5)$	Rotação( $S_4$ , $10^\circ$ , A)	



N	Nome	Definição	valor	Comando	Legenda
403	Triângulo polígono26"	Polígono $T_4, U_4, V_4$	polígono26" = 0.09	Polígono[ $T_4, U_4, V_4$ ]	
403	Segmento de Reta $v_4$	Segmento de Reta [ $T_4, U_4$ ] de Triângulo polígono26"	$v_4 = 1$	SegmentodeReta[ $T_4, U_4$ , polígono26"]	
403	Segmento de Reta $t_4$	Segmento de Reta [ $U_4, V_4$ ] de Triângulo polígono26"	$t_4 = 0.17$	SegmentodeReta[ $U_4, V_4$ , polígono26"]	
403	Segmento de Reta $u_4$	Segmento de Reta [ $V_4, T_4$ ] de Triângulo polígono26"	$u_4 = 1$	SegmentodeReta[ $V_4, T_4$ , polígono26"]	
404	Ponto $W_4$	Imagem de $T_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$W_4 = (0, 0)$	Rotação[ $T_4, 10^\circ, A$ ]	
405	Ponto $Z_4$	Imagem de $U_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$Z_4 = (0.87, -0.5)$	Rotação[ $U_4, 10^\circ, A$ ]	
406	Ponto $A_5$	Imagem de $V_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$A_5 = (0.94, -0.34)$	Rotação[ $V_4, 10^\circ, A$ ]	
407	Triângulo polígono27	Polígono $W_4, Z_4, A_5$	polígono27 = 0.09	Polígono[ $W_4, Z_4, A_5$ ]	
407	Segmento de Reta $a_5$	Segmento de Reta [ $W_4, Z_4$ ] de Triângulo polígono27	$a_5 = 1$	SegmentodeReta[ $W_4, Z_4$ , polígono27]	
407	Segmento de Reta $w_5$	Segmento de Reta [ $Z_4, A_5$ ] de Triângulo polígono27	$w_5 = 0.17$	SegmentodeReta[ $Z_4, A_5$ , polígono27]	
407	Segmento de Reta $z_4$	Segmento de Reta [ $A_5, W_4$ ] de Triângulo polígono27	$z_4 = 1$	SegmentodeReta[ $A_5, W_4$ , polígono27]	
408	Ponto $B_5$	Imagem de $W_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$B_5 = (0, 0)$	Rotação[ $W_4, 10^\circ, A$ ]	
409	Ponto $C_5$	Imagem de $Z_4$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$C_5 = (0.94, -0.34)$	Rotação[ $Z_4, 10^\circ, A$ ]	
410	Ponto $D_5$	Imagem de $A_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$D_5 = (0.98, -0.17)$	Rotação[ $A_5, 10^\circ, A$ ]	
411	Triângulo polígono27'	Polígono $B_5, C_5, D_5$	polígono27' = 0.09	Polígono[ $B_5, C_5, D_5$ ]	
411	Segmento de Reta $d_5$	Segmento de Reta [ $B_5, C_5$ ] de Triângulo polígono27'	$d_5 = 1$	SegmentodeReta[ $B_5, C_5$ , polígono27']	
411	Segmento de Reta $b_5$	Segmento de Reta [ $C_5, D_5$ ] de Triângulo polígono27'	$b_5 = 0.17$	SegmentodeReta[ $C_5, D_5$ , polígono27']	
411	Segmento de Reta $c_5$	Segmento de Reta [ $D_5, B_5$ ] de Triângulo polígono27'	$c_5 = 1$	SegmentodeReta[ $D_5, B_5$ , polígono27']	
412	Ponto $E_5$	Imagem de $B_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$E_5 = (0, 0)$	Rotação[ $B_5, 10^\circ, A$ ]	
413	Ponto $F_5$	Imagem de $C_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$F_5 = (0.98, -0.17)$	Rotação[ $C_5, 10^\circ, A$ ]	
414	Ponto $G_5$	Imagem de $D_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$G_5 = (1, 0)$	Rotação[ $D_5, 10^\circ, A$ ]	
415	Triângulo polígono27''	Polígono $E_5, F_5, G_5$	polígono27'' = 0.09	Polígono[ $E_5, F_5, G_5$ ]	
415	Segmento de Reta $g_5$	Segmento de Reta [ $E_5, F_5$ ] de Triângulo polígono27''	$g_5 = 1$	SegmentodeReta[ $E_5, F_5$ , polígono27'']	
415	Segmento de Reta $e_5$	Segmento de Reta [ $F_5, G_5$ ] de Triângulo polígono27''	$e_5 = 0.17$	SegmentodeReta[ $F_5, G_5$ , polígono27'']	
415	Segmento de Reta $f_5$	Segmento de Reta [ $G_5, E_5$ ] de Triângulo polígono27''	$f_5 = 1$	SegmentodeReta[ $G_5, E_5$ , polígono27'']	
416	Ponto $H_5$	Imagem de $E_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$H_5 = (0, 0)$	Rotação[ $E_5, 10^\circ, A$ ]	
417	Ponto $I_5$	Imagem de $F_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$I_5 = (1, 0)$	Rotação[ $F_5, 10^\circ, A$ ]	
418	Ponto $J_5$	Imagem de $G_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$J_5 = (0.98, 0.17)$	Rotação[ $G_5, 10^\circ, A$ ]	
419	Triângulo polígono27'''	Polígono $H_5, I_5, J_5$	polígono27''' = 0.09	Polígono[ $H_5, I_5, J_5$ ]	
419	Segmento de Reta $j_5$	Segmento de Reta [ $H_5, I_5$ ] de Triângulo polígono27'''	$j_5 = 1$	SegmentodeReta[ $H_5, I_5$ , polígono27''']	
419	Segmento de Reta $h_5$	Segmento de Reta [ $I_5, J_5$ ] de Triângulo polígono27'''	$h_5 = 0.17$	SegmentodeReta[ $I_5, J_5$ , polígono27''']	
419	Segmento de Reta $i_5$	Segmento de Reta [ $J_5, H_5$ ] de Triângulo polígono27'''	$i_5 = 1$	SegmentodeReta[ $J_5, H_5$ , polígono27''']	
420	Ponto $K_5$	Imagem de $H_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$K_5 = (0, 0)$	Rotação[ $H_5, 10^\circ, A$ ]	
421	Ponto $L_5$	Imagem de $I_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$L_5 = (0.98, 0.17)$	Rotação[ $I_5, 10^\circ, A$ ]	
422	Ponto $M_5$	Imagem de $J_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$M_5 = (0.94, 0.34)$	Rotação[ $J_5, 10^\circ, A$ ]	
423	Triângulo polígono28	Polígono $K_5, L_5, M_5$	polígono28 = 0.09	Polígono[ $K_5, L_5, M_5$ ]	
423	Segmento de Reta $m_5$	Segmento de Reta [ $K_5, L_5$ ] de Triângulo polígono28	$m_5 = 1$	SegmentodeReta[ $K_5, L_5$ , polígono28]	
423	Segmento de Reta $k_5$	Segmento de Reta [ $L_5, M_5$ ] de Triângulo polígono28	$k_5 = 0.17$	SegmentodeReta[ $L_5, M_5$ , polígono28]	
423	Segmento de Reta $l_5$	Segmento de Reta [ $M_5, K_5$ ] de Triângulo polígono28	$l_5 = 1$	SegmentodeReta[ $M_5, K_5$ , polígono28]	
424	Ponto $N_5$	Imagem de $K_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$N_5 = (0, 0)$	Rotação[ $K_5, 10^\circ, A$ ]	
425	Ponto $O_5$	Imagem de $L_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$O_5 = (0.94, 0.34)$	Rotação[ $L_5, 10^\circ, A$ ]	
426	Ponto $P_5$	Imagem de $M_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$P_5 = (0.87, 0.5)$	Rotação[ $M_5, 10^\circ, A$ ]	
427	Triângulo polígono28'	Polígono $N_5, O_5, P_5$	polígono28' = 0.09	Polígono[ $N_5, O_5, P_5$ ]	
427	Segmento de Reta $p_5$	Segmento de Reta [ $N_5, O_5$ ] de Triângulo polígono28'	$p_5 = 1$	SegmentodeReta[ $N_5, O_5$ , polígono28']	

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
427	Segmento de Reta $n_5$	Segmento de Reta $[O_5, P_5]$ de Triângulo polígono28°	$n_5 = 0.17$	SegmentodeReta[O <sub>5</sub> , P <sub>5</sub> , polígono28]	
427	Segmento de Reta $o_5$	Segmento de Reta $[P_5, N_5]$ de Triângulo polígono28°	$o_5 = 1$	SegmentodeReta[P <sub>5</sub> , N <sub>5</sub> , polígono28]	
428	Ponto $Q_5$	Imagem de $N_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$Q_5 = (0, 0)$	Rotação[N <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
429	Ponto $R_5$	Imagem de $O_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$R_5 = (0.87, 0.5)$	Rotação[O <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
430	Ponto $S_5$	Imagem de $P_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$S_5 = (0.77, 0.84)$	Rotação[P <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
431	Triângulo polígono28°	Polígono $Q_5, R_5, S_5$	polígono28° = 0.09	Polígono[Q <sub>5</sub> , R <sub>5</sub> , S <sub>5</sub> ]	
431	Segmento de Reta $s_5$	Segmento de Reta $[Q_5, R_5]$ de Triângulo polígono28°	$s_5 = 1$	SegmentodeReta[Q <sub>5</sub> , R <sub>5</sub> , polígono28]	
431	Segmento de Reta $q_5$	Segmento de Reta $[R_5, S_5]$ de Triângulo polígono28°	$q_5 = 0.17$	SegmentodeReta[R <sub>5</sub> , S <sub>5</sub> , polígono28]	
431	Segmento de Reta $r_5$	Segmento de Reta $[S_5, Q_5]$ de Triângulo polígono28°	$r_5 = 1$	SegmentodeReta[S <sub>5</sub> , Q <sub>5</sub> , polígono28]	
432	Ponto $T_5$	Imagem de $Q_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$T_5 = (0, 0)$	Rotação[Q <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
433	Ponto $U_5$	Imagem de $R_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$U_5 = (0.77, 0.84)$	Rotação[R <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
434	Ponto $V_5$	Imagem de $S_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$V_5 = (0.64, 0.77)$	Rotação[S <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
435	Triângulo polígono28°	Polígono $T_5, U_5, V_5$	polígono28° = 0.09	Polígono[T <sub>5</sub> , U <sub>5</sub> , V <sub>5</sub> ]	
435	Segmento de Reta $v_5$	Segmento de Reta $[T_5, U_5]$ de Triângulo polígono28°	$v_5 = 1$	SegmentodeReta[T <sub>5</sub> , U <sub>5</sub> , polígono28]	
435	Segmento de Reta $t_5$	Segmento de Reta $[U_5, V_5]$ de Triângulo polígono28°	$t_5 = 0.17$	SegmentodeReta[U <sub>5</sub> , V <sub>5</sub> , polígono28]	
435	Segmento de Reta $u_5$	Segmento de Reta $[V_5, T_5]$ de Triângulo polígono28°	$u_5 = 1$	SegmentodeReta[V <sub>5</sub> , T <sub>5</sub> , polígono28]	
436	Ponto $W_5$	Imagem de $T_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$W_5 = (0, 0)$	Rotação[T <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
437	Ponto $Z_5$	Imagem de $U_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$Z_5 = (0.64, 0.77)$	Rotação[U <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
438	Ponto $A_6$	Imagem de $V_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$A_6 = (0.5, 0.87)$	Rotação[V <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
439	Triângulo polígono29°	Polígono $W_5, Z_5, A_6$	polígono29° = 0.09	Polígono[W <sub>5</sub> , Z <sub>5</sub> , A <sub>6</sub> ]	
439	Segmento de Reta $a_6$	Segmento de Reta $[W_5, Z_5]$ de Triângulo polígono29°	$a_6 = 1$	SegmentodeReta[W <sub>5</sub> , Z <sub>5</sub> , polígono29]	
439	Segmento de Reta $w_6$	Segmento de Reta $[Z_5, A_6]$ de Triângulo polígono29°	$w_6 = 0.17$	SegmentodeReta[Z <sub>5</sub> , A <sub>6</sub> , polígono29]	
439	Segmento de Reta $z_6$	Segmento de Reta $[A_6, W_5]$ de Triângulo polígono29°	$z_6 = 1$	SegmentodeReta[A <sub>6</sub> , W <sub>5</sub> , polígono29]	
440	Ponto $B_6$	Imagem de $W_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$B_6 = (0, 0)$	Rotação[W <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
441	Ponto $C_6$	Imagem de $Z_5$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$C_6 = (0.5, 0.87)$	Rotação[Z <sub>5</sub> , $10^\circ$ , A]	
442	Ponto $D_6$	Imagem de $A_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$D_6 = (0.34, 0.94)$	Rotação[A <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
443	Triângulo polígono29°	Polígono $B_6, C_6, D_6$	polígono29° = 0.09	Polígono[B <sub>6</sub> , C <sub>6</sub> , D <sub>6</sub> ]	
443	Segmento de Reta $d_6$	Segmento de Reta $[B_6, C_6]$ de Triângulo polígono29°	$d_6 = 1$	SegmentodeReta[B <sub>6</sub> , C <sub>6</sub> , polígono29]	
443	Segmento de Reta $b_6$	Segmento de Reta $[C_6, D_6]$ de Triângulo polígono29°	$b_6 = 0.17$	SegmentodeReta[C <sub>6</sub> , D <sub>6</sub> , polígono29]	
443	Segmento de Reta $c_6$	Segmento de Reta $[D_6, B_6]$ de Triângulo polígono29°	$c_6 = 1$	SegmentodeReta[D <sub>6</sub> , B <sub>6</sub> , polígono29]	
444	Ponto $E_6$	Imagem de $B_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$E_6 = (0, 0)$	Rotação[B <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
445	Ponto $F_6$	Imagem de $C_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$F_6 = (0.34, 0.94)$	Rotação[C <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
446	Ponto $G_6$	Imagem de $D_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$G_6 = (0.17, 0.98)$	Rotação[D <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
447	Triângulo polígono29°	Polígono $E_6, F_6, G_6$	polígono29° = 0.09	Polígono[E <sub>6</sub> , F <sub>6</sub> , G <sub>6</sub> ]	
447	Segmento de Reta $g_6$	Segmento de Reta $[E_6, F_6]$ de Triângulo polígono29°	$g_6 = 1$	SegmentodeReta[E <sub>6</sub> , F <sub>6</sub> , polígono29]	
447	Segmento de Reta $e_7$	Segmento de Reta $[F_6, G_6]$ de Triângulo polígono29°	$e_7 = 0.17$	SegmentodeReta[F <sub>6</sub> , G <sub>6</sub> , polígono29]	
447	Segmento de Reta $f_6$	Segmento de Reta $[G_6, E_6]$ de Triângulo polígono29°	$f_6 = 1$	SegmentodeReta[G <sub>6</sub> , E <sub>6</sub> , polígono29]	
448	Ponto $H_6$	Imagem de $E_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$H_6 = (0, 0)$	Rotação[E <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
449	Ponto $I_6$	Imagem de $F_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$I_6 = (0.17, 0.98)$	Rotação[F <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
450	Ponto $J_6$	Imagem de $G_6$ na rotação de ângulo $10^\circ$	$J_6 = (0, 1)$	Rotação[G <sub>6</sub> , $10^\circ$ , A]	
451	Triângulo polígono29°	Polígono $H_6, I_6, J_6$	polígono29° = 0.09	Polígono[H <sub>6</sub> , I <sub>6</sub> , J <sub>6</sub> ]	
451	Segmento de Reta $i_6$	Segmento de Reta $[H_6, I_6]$ de Triângulo polígono29°	$i_6 = 1$	SegmentodeReta[H <sub>6</sub> , I <sub>6</sub> , polígono29]	
451	Segmento de Reta $h_7$	Segmento de Reta $[I_6, J_6]$ de Triângulo polígono29°	$h_7 = 0.17$	SegmentodeReta[I <sub>6</sub> , J <sub>6</sub> , polígono29]	
451	Segmento de Reta $j_6$	Segmento de Reta $[J_6, H_6]$ de Triângulo polígono29°	$j_6 = 1$	SegmentodeReta[J <sub>6</sub> , H <sub>6</sub> , polígono29]	

Nº	Nome	Definição	Valor	Comando	Legenda
452	Segmento de Reta $j_1$	Segmento de Reta [A, B]	$j_1 = 1$	SegmentodeReta[A, B]	r
453	Ponto $K_5$	Pontos de Interseção de $b_{17}, b_{17}^*$	$K_5 = (-3.05, 0)$	Interseção[b17, b17*]	
454	Ponto $L_5$	Pontos de Interseção de $a_{18}, b_4$	$L_5$ não definido(a)	Interseção[a18, b4]	
455	Ponto $M_5$	Pontos de Interseção de $a_{18}, b_4$	$M_5$ não definido(a)	Interseção[a18, b4]	
456	Ponto $N_5$	Pontos de Interseção de $a_{18}, b_4$	$N_5$ não definido(a)	Interseção[a18, b4]	
457	Ponto $O_5$	Pontos de Interseção de $a_{18}, e_5$	$O_5$ não definido(a)	Interseção[a18, e5]	
458	Ponto $P_5$	Pontos de Interseção de $p_1, c_1$	$P_5 = (0, 1)$	Interseção[p1, c1]	B
459	Ponto $Q_5$	Pontos de Interseção de $p_1, c_1$	$Q_5 = (0, -1)$	Interseção[p1, c1]	D
460	Textotexto16		*Nota: para prosseguir a abertura tem de e...		
461	Botão botão9		botão9		Reiniciar
462	Booleano k		k = true		3.
463	Textotexto16 <sub>1</sub>		*Nota: para prosseguir a abertura tem de e...		
464	Booleano l <sub>1</sub>		l <sub>1</sub> = true		
465	Textotexto17		"= p1.r[2]"		
466	Textotexto18		"Podemos então concluir que a fórmula do cál...		
467	Ponto $R_5$		$R_5 = (2.19, 4.16)$		
468	Ponto $S_5$		$S_5 = (1.99, 4.14)$		
469	Imagem imagem1		imagem1		
470	Textotexto19		"Área do círculo"		
471	Textotexto20		"(unidades de área)"		